Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Existência e multiplicidade de soluções positivas em equações e sistemas elípticos de tipo gradiente

Vicente Costa Fernandes

Dissertação
Mestrado em Matemática

Lisboa, outubro de 2014

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Existência e multiplicidade de soluções positivas em equações e sistemas elípticos de tipo gradiente

Vicente Costa Fernandes

Dissertação
Mestrado em Matemática

Orientadora: Prof.ª Dra. Ana Rute do Nascimento Mendes Domingos
Coorientador: Prof. Dr. Hugo Ricardo Nabais Tavares

Lisboa, outubro de 2014

Resumo

Recorrendo a técnicas variacionais, estudamos as soluções do sistema elíptico não linear

$$\begin{cases} -\Delta u_i + \lambda_i u_i = \mu_i |u_i|^{2p-2} u_i + \beta |u_i|^{p-2} u_i \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |u_j|^p \quad \text{em } \Omega, \\ u_i > 0 \text{ em } \Omega, \quad u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \qquad i = 1, ..., m, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ é um domínio regular limitado e o expoente da não linearidade é superlinear e subcrítico. Seguindo os trabalhos de N. Dancer, J.-C. Wei e T. Weth (2010), R. Tian e Z. Q. Wang (2011) e N. Dancer e T. Weth (2012), mostramos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para certos valores de β e, para outros, estabelecemos limitações *a priori* para as soluções.

Palavras-chave: sistemas elípticos, métodos variacionais, multiplicidade de soluções positivas, limitações *a priori*, teoria de Lusternik-Schnirelmann, variedade de Nehari.

Abstract

Using variational methods, we study the solutions of the nonlinear elliptic system

$$\begin{cases} -\Delta u_i + \lambda_i u_i = \mu_i |u_i|^{2p-2} u_i + \beta |u_i|^{p-2} u_i \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |u_j|^p \quad \text{in } \Omega, \\ u_i > 0 \text{ in } \Omega, \quad u_i = 0 \text{ on } \partial\Omega, \qquad i = 1, ..., m, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ is a smooth and bounded domain and the nonlinear exponent is superlinear and subcritical. Following the work of N. Dancer, J.-C. Wei and T. Weth (2010), R. Tian and Z. Q. Wang (2011) and N. Dancer and T. Weth (2012), we prove the existence and multiplicity of positive solutions for some values of β, while for other values we establish *a priori* bounds for the solutions.

Keywords: elliptic systems, variational methods, multiplicity of positive solutions, *a priori* bounds, Lusternik-Schnirelmann theory, Nehari manifold.

Agradecimentos

É chegada a altura de agradecer todo o apoio que recebi ao longo desta etapa, sem o qual não teria sido possível realizar este trabalho. Em primeiro lugar gostaria de realçar o privilégio que sinto por ter sido orientado pelo professor Hugo Tavares e pela professora Ana Rute Domingos. Por toda a dedicação, pelos preciosos conselhos, pelos muitos ensinamentos e pela boa disposição, devo-lhes um especial agradecimento. Agradeço a todos os professores que enriqueceram a minha experiência na Faculdade de Ciências, e também a todos os meus colegas, pelos bons momentos que passámos. Por fim, agradeço a toda a minha família e amigos pela paciência e pela força que me deram ao longo de todo este ciclo, e em especial aos meus pais, à minha irmã e à Isabel.

Mais uma vez, o meu mais sincero Obrigado a todos.

Conteúdo

Notações

∂A	fronteira de A;
$\bar{A}$	$= A \cup \partial A,$ aderência de A;
$C(A, B)$	espaço das aplicações contínuas de X em Y;
$\text{dist}(x, A)$	$= \inf\{\lVert x - y \rVert : y \in A\}$;
$\mathbb{R}^N_+$	$= \{x = (x_1, \ldots, x_N) : x_N > 0\}$;
$\mathbb{S}^{N-1}$	$= \{x \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \cdots + x_N^2 = 1\}$;
e_N	$= (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^N$;
$B_r(x)$	bola aberta de centro em $x \in \mathbb{R}^N$ e raio $r > 0$;
B_r	bola aberta de centro em 0 e raio $r > 0$;
$\lVert \cdot \rVert$	norma do espaço principal no contexto;
$\lvert \cdot \rvert_p$	norma usual do espaço $L^p(\Omega)$, dada por $\lvert u\rvert_p = \left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ se $1 \leqslant p < \infty$, $\quad \lvert u\rvert_\infty = \sup\text{ess}_\Omega \lvert u\rvert$;
u_{x_i}	$= \frac{\partial u}{\partial x_i},$ derivada de u em ordem a x_i;
∇u	$= (u_{x_1}, \ldots, u_{x_N}),$ gradiente de u;
Δu	$= \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i},$ Laplaciano de u;
2^*	$= \frac{2N}{N-2},$ expoente crítico de Sobolev, para $N \geqslant 3$.

Introdução

Nos últimos anos, o sistema de tipo elíptico não linear

$$\begin{cases} -\Delta u_i + (\lambda_i + V_i)u_i = \mu_i u_i^3 + u_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \beta_{ij} u_j^2 \quad \text{em } \Omega, \\ u_i > 0 \text{ em } \Omega, \quad u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \qquad i = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{P_0}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular limitado, tem sido alvo de investigação por parte de diversos autores. O crescente interesse no estudo deste sistema advém sobretudo da diversidade de aplicações no campo da Física do modelo do qual ele é proveniente – o sistema não linear acoplado de equações de Schrödinger (também designadas por equações de Gross-Pitaevskii):

$$\begin{cases} -\imath \dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_i = \Delta\Phi_i - V_i(x)\Phi_i + \mu_i|\Phi_i|^2\Phi_i + \Phi_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \beta_{ij}|\Phi_j|^2 \quad \text{em } \Omega, \\ \Phi_i = \Phi_i(x,t) \in \mathbb{C}, \ \Phi_i(x,t) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, \ t > 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{P_1}$$

De entre os fenómenos modelados por estas equações, destacam-se a interação de componentes de um gás a temperaturas muito baixas e efeitos da ótica não linear. No primeiro caso, o sistema (P_1) descreve uma mistura de condensados de Bose-Einstein de espécies diferentes em m estados hiperfinos diferentes (ver [5, 6] e suas referências). Fisicamente, as funções Φ_i representam as funções de onda dos condensados, enquanto que as funções V_i representam os potenciais de aprisionamento correspondentes a cada estado hiperfino. Associamos a cada espécie diferente uma equação, sendo que os termos de acoplamento β_{ij} traduzem a interação entre as diferentes espécies e os coeficientes μ_i refletem a interação dentro da própria espécie. Se estes valores forem positivos, a interação é atrativa; por outro lado, se forem negativos, correspondem a uma interação repulsiva. Já no contexto da ótica não linear, cada função Φ_i representa a i-ésima componente de um raio de luz em certos meios fotorrefrativos (ver [24] e suas referências).

Quando, em particular, consideramos as soluções de (P_1) da forma

$$\Phi_i(x,t) = e^{\imath\lambda_i t} u_i(x), \quad i = 1, \ldots, m,$$

designadas por ondas estacionárias, é fácil verificar que o sistema (P_1) se reduz a (P_0). Impondo condições sobre os potenciais V_i e sobre os coeficientes λ_i, μ_i e β_i, diversos resultados sobre o conjunto das soluções de (P_0) têm sido estabelecidos. Nesta dissertação, interessa-nos particularmente o caso em que $\mu_i > 0$ para $i = 1, \dots, m$, $\beta := \beta_{ij}$ para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant m$ e $V_i \equiv 0$ para $i = 1, \dots, m$, hipóteses que assumiremos desde já.

Com estas condições, em 2010, E. N. Dancer, J.-C. Wei e T. Weth [5] estudaram o impacto do parâmetro β na existência de limitações *a priori* para soluções do sistema (P_0) com duas equações ($m = 2$) e com $N \leqslant 3$. Nesse artigo, concluíram primeiro que, para $\beta > -\sqrt{\mu_1\mu_2}$, o conjunto das soluções é limitado em $L^\infty(\Omega)$. A demonstração deste resultado recorre à técnica de *blow up* de Gidas e Spruck [11], que data de 1981, sendo para isso necessário provar resultados do tipo Liouville, para um problema relacionado, em $\mathbb{R}^N$ e em $\mathbb{R}^N_+$. Em 2012, Dancer e Weth [6], trabalhando com o caso mais geral de um sistema do tipo gradiente (isto é, um sistema que pode ser escrito como $-\Delta u_i = \partial_{u_i} F(u)$, $\forall i$, para alguma função $F \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ com $F(0) = 0$), provaram que a não existência de solução não trivial para o problema em todo o espaço, conjuntamente com uma hipótese de homogeneidade, implica a não existência de solução, não trivial, no semiespaço.

Por outro lado, para $\beta \leqslant \sqrt{\mu_1\mu_2}$, Dancer *et al* provaram que o mesmo problema, com $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\mu_1 = \mu_2$, admite uma sucessão ilimitada de soluções positivas. Para tal, os autores usaram uma variante da teoria de Lusternik-Schnirelmann aplicada à reflexão $\tilde{\sigma} : (u, v) \mapsto (v, u)$, trabalhando numa variedade do tipo Nehari que depende de β. Graças a essa dependência e ao facto de a variedade ser invariante para σ, é possível "controlar"a localização dos pontos fixos de σ, o que é essencial para aplicar a teoria de Lusternik-Schnirelmann. Em 2011, R. Tian e Z. Q. Wang [24] generalizaram este resultado para um sistema com m equações. Neste caso, é usado o subgrupo do grupo de permutações S_m gerado por $\sigma : (u_1, u_2, \dots, u_m) \mapsto (u_2, \dots, u_m, u_1)$ e é definida uma teoria de índice para este subgrupo.

Nesta dissertação estudamos sistemas variacionais (isto é, sistemas cujas soluções podem ser obtidas através de pontos críticos de um funcional) do tipo (P_0), com foco nos problemas de existência e multiplicidade de soluções e determinação de limitações *a priori* das soluções. Mais especificamente, iremos explorar o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i + \lambda_i u_i = \mu_i |u_i|^{2p-2} u_i + \beta |u_i|^{p-2} u_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |u_j|^p \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u_i > 0 \text{ em } \Omega, \quad u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \qquad i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{P}$$

em que o expoente da não linearidade é superlinear e subcrítico, já que as estratégias que usaremos dependem de métodos variacionais que usam as injeções compactas de Sobolev.

Apresentamos agora um resumo do conteúdo dos capítulos.

No Capítulo 1 partimos do caso simples de uma equação elíptica para explicar a aplicação dos métodos variacionais que usaremos posteriormente. Mais concretamente, utilizamos o Teorema da passagem da montanha para provar a existência de uma solução positiva do problema de valores na fronteira com a equação $-\Delta u = |u|^{p-2} u$, para u em

$H_0^1(\Omega)$. Para o mesmo problema, aplicamos o método de Gidas e Spruck para obter limitações *a priori* para soluções positivas e, na Secção 1.3, introduzimos a teoria de Lusternik-Schnirelmann para obter uma infinidade de soluções.

No Capítulo 2 estudamos o problema (P) com as restrições $\lambda_i = \lambda_j = 1$ e $\mu_i = \mu_j =: \mu > 0$ para quaisquer $0 \leqslant i, j \leqslant m$ e

$$2 \leqslant p < \frac{2^*}{2} = \begin{cases} \frac{N}{N-2} & \text{para } N \geqslant 3 \\ \infty & \text{para } N = 1, 2. \end{cases}$$

Seguindo a estratégia usada por Tian e Wang para o caso em que $p = 2$ e $N \leqslant 3$, apresentamos detalhadamente a prova do Teorema 4.8 de [24], cuja demonstração não consta no artigo.

No Capítulo 3 estabelecemos limitações *a priori* para soluções do sistema (P) com duas equações $(m = 2)$, generalizando o trabalho de Dancer *et al* [5] feito para o caso em que $p = 2$ e $N \leqslant 3$. Para certos valores de p seguimos as ideias de [5], enquanto que para outros adaptamos a estratégia de [6]. Ainda assim, as técnicas usadas têm limitações que não permitiram obter os resultados para todos os valores de p do caso subcrítico $(1 < p < 2^*)$, ficando em aberto saber o que se passa nesses casos.

Por fim, no Apêndice reunimos algumas definições e resultados úteis, aos quais recorreremos ao longo da dissertação.

Capítulo 1

Resultados para uma equação elíptica

O objetivo deste capítulo é estudar o problema elíptico não linear com condições de Dirichlet no bordo

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ é um domínio regular limitado e $2 < p < 2^*$.

Primeiro iremos provar a existência de soluções positivas de (1.1) através de técnicas variacionais e posteriormente estabeleceremos limitações *a priori* para soluções positivas através da técnica de *blow up* introduzida por Gidas e Spruck em [11]. Por fim, seguindo [21], iremos introduzir o genus de Krasnoselski e aplicar a teoria de Lusternik-Schnirelmann para obter multiplicidade de soluções fracas de (1.1).

1.1 Existência de solução via Teorema da passagem da montanha

Vamos mostrar que o problema (1.1) tem, pelo menos, uma solução positiva. Consideremos o funcional $E : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx,$$

onde $u^+ := \max\{u, 0\}$. Como Ω é limitado, a desigualdade de Poincaré garante que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C\int_\Omega u^2 dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

pelo que a norma $\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, que passaremos a usar, é equivalente neste espaço à norma canónica de $H^1(\Omega)$. Como $2 < p < 2^*$, a injeção $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua e compacta. Além disso, E é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$ e tem-se

$$E'(u)\,\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega (u^+)^{p-1} \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

o que significa que, se u é uma solução fraca positiva de (1.1), então u é um ponto crítico não trivial de E, isto é,

$$u \neq 0, \qquad E'(u)\,\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Vejamos agora que a implicação contrária também é válida. Com efeito, se $u \neq 0$ for um ponto crítico de E, u é uma solução fraca não trivial de

$$\begin{cases} -\Delta u = (u^+)^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Multiplicando esta equação por u^- e integrando em Ω, obtemos

$$0 = \int_\Omega (u^+)^{p-1} u^- \, dx = \int_\Omega (-\Delta u^+ \, u^- + \Delta u^- \, u^-) \, dx = -\|u^-\|.$$

Logo $u^- \equiv 0$, pelo que $u \geqslant 0$ e, pelo princípio do máximo (cf. Teorema A.5 do Apêndice), u é uma solução positiva de (1.1).

Para determinar um ponto crítico do funcional E, iremos recorrer ao chamado Teorema da passagem da montanha (cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [21, Teorema 2.2]). Para compensar o facto de estarmos a trabalhar num espaço que não é compacto, precisamos de estabelecer certas condições de compacidade sobre o próprio funcional.

Dado um espaço de Banach X e uma aplicação $E \in C^1(X, \mathbb{R})$, diremos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor (ou nível) crítico de E se existir $u \in X$ tal que $E(u) = c$ e $E'(u) = 0$. Além disso, diremos que E satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ (ou, abreviadamente, que satisfaz $(PS)_c$), se toda a sucessão $(u_k)_k \subset X$ tal que $E(u_k) \to c$ e $E'(u_k) \to 0$ tem uma subsucessão convergente. Diremos ainda que E satisfaz a condição $(PS)_c$ fraca se $E(u_k) \to c$ e $E'(u_k) \to 0$ implica que c é valor crítico de E.

Teorema 1.1 (Passagem da montanha)**.** *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Tomem-se $E \in C^1(X, \mathbb{R})$, $u, v \in X$ e $r > 0$ tais que*

$$\|u - v\| > r, \qquad \inf_{\|x-u\|=r} E(x) = b > a := \max\{E(u), E(v)\}$$

e defina-se

$$c := \inf_{h \in H} \max_{t \in [0,1]} E(h(t)),$$

onde $H = \{h \in C([0,1], X) : h(0) = u, h(1) = v\}$. Então, se E satisfizer a condição $(PS)_c$ fraca, c é valor crítico de E.

Teorema 1.2. *Se $2 < p < 2^*$, então o problema* (1.1) *admite, pelo menos, uma solução positiva.*

Demonstração. Iremos aplicar o Teorema 1.1 com $X := H_0^1(\Omega)$ e $u \equiv 0$ (consequentemente $E(u) \equiv 0$). Seja $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $E(v) \leqslant 0$. Note-se que tal v existe já que, fixando $w \in H_0^1(\Omega)$ com $w^+ \neq 0$, se tem

$$E(\alpha w) = \frac{\alpha^2}{2} \int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \frac{\alpha^p}{p} \int_\Omega (w^+)^p dx \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} -\infty \quad (p > 2),$$

pelo que basta tomar $v = \alpha w$ com α suficientemente grande.

Vejamos agora que existe $r > 0$ pequeno tal que

$$\inf_{\|u\|=r} E(u) > 0.$$

Pela injeção de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$|u|_p \leqslant C\|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Então

$$E(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C^p}{p}\|u\|^p.$$

Se u for tal que $\|u\| = r$, resulta que

$$E(u) \geqslant \frac{r^2}{2} - \frac{C^p}{p} r^p = r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C^p}{p} r^{p-2} \right) > 0$$

sempre que $r < (p/2C^p)^{1/(p-2)}$. Consequentemente, provámos que existe $0 < r < \|v\|$ tal que

$$\inf_{\|u\|=r} E(u) > \max\{E(0), E(v)\} = 0.$$

Em seguida vamos verificar que, para todo o $c \in \mathbb{R}$, E verifica a condição $(PS)_c$, o que, naturalmente, implica que E satisfaz também a condição $(PS)_c$ fraca. Fixemos um $c \in \mathbb{R}$ e consideremos uma sucessão $(u_k)_k$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$E(u_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} c \text{ em } \mathbb{R}, \quad E'(u_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Queremos ver que $(u_k)_k$ tem uma subsucessão convergente em $H_0^1(\Omega)$. Por hipótese, temos que

$$E(u_k) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx - \frac{1}{p} \int_\Omega (u_k^+)^p dx \leqslant C_1. \tag{1.3}$$

Por outro lado, como $|E'(u_k)u_k| \leqslant \|E'(u_k)\|_{H^{-1}} \|u_k\|$, resulta que

$$E'(u_k)u_k = \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx - \int_\Omega (u_k^+)^p dx = o(1)\, \|u_k\|, \quad k \to \infty. \tag{1.4}$$

Então, de (1.3) e (1.4) deduzimos que

$$\frac{1}{2}\|u_k\|^2 \leqslant C_1 + \frac{1}{p}\|u_k\|^2 + o(1)\,\|u_k\|,$$

e portanto

$$0 < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_k\|^2 \leqslant C_1 + C_2\|u_k\|,$$

o que implica que a sucessão $(u_k)_k$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Logo, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ e uma subsucessão $(u_{k_j})_j$ tal que

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega).$$

Assim, para ver que $u_{k_j} \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, basta ver que $\|u_{k_j}\| \to \|u\|$. Com efeito, temos que $E'(u_{k_j})(u_{k_j} - u) = o(1)$, isto é,

$$\int_\Omega \nabla u_{k_j} \cdot \nabla(u_{k_j} - u)\,dx - \int_\Omega (u_{k_j}^+)^{p-1}(u_{k_j} - u)\,dx = o(1). \tag{1.5}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com injeção compacta, temos que $u_{k_j} \to u$ em $L^p(\Omega)$, pelo que, aplicando a desigualdade de Hölder ao segundo termo da equação anterior, obtemos

$$\left|\int_\Omega (u_{k_j}^+)^{p-1}(u_{k_j} - u)\,dx\right| \leqslant \left(\int_\Omega |u_{k_j} - u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega (u_{k_j}^+)^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Logo, de (1.5) concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u_{k_j}|^2 dx - \int_\Omega \nabla u_{k_j} \cdot \nabla u \; dx \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,$$

e portanto $\|u_{k_j}\| \to \|u\|$, o que termina a verificação da condição $(PS)_c$.

Assim, pelo Teorema da passagem da montanha,

$$c = \inf_{h\in H} \max_{t\in[0,1]} E(h(t))$$

é um nível crítico, isto é, existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que $E(w) = c$ e $E'(w) = 0$. Observe-se que temos $c > 0$ (o que implica que $w \not\equiv 0$), visto que, para qualquer $h \in H$,

$$\max_{t\in[0,1]} E(h(t)) \geqslant \inf_{\|u\|=r} E(u) > 0.$$

Logo, w é uma solução positiva de (1.1).

$\square$

1.2 Limitações *a priori*

Vamos agora provar a existência de limitações *a priori* para soluções clássicas positivas de (1.1). De facto, podemos considerar o problema mais geral

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ limitado,} \\ u = \varphi(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde φ é uma função limitada em $\partial\Omega$ e f é uma função contínua em $x \in \overline{\Omega}$ tal que, para um $2 < p < 2^*$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = h(x) \quad \text{uniformemente em } x \in \overline{\Omega}, \tag{1.7}$$

sendo h uma função contínua e estritamente positiva em $\overline{\Omega}$ (no caso do problema (1.1), temos $h(x) \equiv 1$).

Iremos provar o próximo teorema por redução ao absurdo, através da técnica de *blow up* (introduzida por Gidas e Spruck [11]) e de resultados do tipo Liouville.

Teorema 1.3. *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma solução positiva de* (1.6)*. Então existe uma constante C que depende de p e de Ω, mas não de u, tal que*

$$u(x) \leqslant C, \quad \forall x \in \Omega.$$

Os seguintes resultados do tipo Liouville foram provados por Gidas e Spruck em [12, Teorema 1.1] e [11, Teorema 1.3], respetivamente.

Teorema 1.4. *Seja u uma solução positiva de classe C^2 de*

$$-\Delta u = u^{p-1} \quad \textit{em } \mathbb{R}^N, \quad N \geqslant 2 \tag{1.8}$$

com $2 < p < 2^*$. Então $u \equiv 0$.

Teorema 1.5. *Seja $\mathbb{R}^N_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Suponhamos que u é uma solução positiva de classe $C^2(\mathbb{R}^N_+) \cap C^0(\{x \in \mathbb{R}^N : x_N \geqslant 0\})$ de*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{p-1} & \textit{em } \mathbb{R}^N_+, \quad N \geqslant 2 \\ u = 0 & \textit{em } \{x_N = 0\}. \end{cases} \tag{1.9}$$

com $2 < p < 2^*$. Então $u \equiv 0$.

Demonstração do Teorema 1.3. Por absurdo, suponhamos que existe uma sucessão de soluções $(u_k(x))_k$ de (1.6) e uma sucessão de pontos $(x_k)_k \subset \Omega$ tais que

$$M_k := u_k(x_k) = \sup_{x\in\Omega} u_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty \tag{1.10}$$

Seja $(\lambda_k)_k$ a sucessão de números positivos dada por

$$\lambda_k := M_k^{-\frac{p-2}{2}}. \tag{1.11}$$

Podemos agora definir a função de *blow up*[(a)] como

$$v_k(y) := \lambda_k^{\frac{2}{p-2}} u_k(\lambda_k y + x_k),$$

cujo domínio é

$$\Omega_k := \frac{\Omega - x_k}{\lambda_k} = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \lambda_k y + x_k \in \Omega \right\}.$$

Recorrendo, se for necessário, a uma subsucessão, podemos supor que $x_k \to x_0 \in \overline{\Omega}$ quando $k \to \infty$. Vamos tratar separadamente o caso em que $x_0 \in \Omega$ e o caso em que $x_0 \in \partial\Omega$.

Caso 1: $x_0 \in \Omega$. Vamos reduzir o problema à equação do Teorema 1.4. Designando por $2d > 0$ a distância de x_0 a $\partial\Omega$, facilmente se verifica que, para k suficientemente grande, as funções v_k estão bem definidas na bola $B_{d/\lambda_k}(0)$. Além disso, por (1.11),

$$\sup_{y \in B_{d/\lambda_k}(0)} v_k(y) = v_k(0) = \lambda_k^{\frac{2}{p-2}} M_k = 1.$$

Como $u_k(x) = \lambda_k^{-\frac{2}{p-2}} v_k(\frac{x - x_k}{\lambda_k})$ é solução de (1.6), $v_k(y)$ satisfaz

$$-\Delta v_k(y) = \lambda_k^{\frac{2(p-1)}{p-2}} f\big(\lambda_k y + x_k, \lambda_k^{-\frac{2}{p-2}} v_k(y)\big) \quad \text{em } B_{d/\lambda_k}(0). \tag{1.12}$$

Fixe-se $R > 0$. Como $\lambda_k \to 0$ quando $k \to +\infty$, tem-se $R < d/\lambda_k$ para k suficientemente grande, logo (1.12) vale em $B_R(0)$. Tendo em conta a hipótese (1.7), resulta que

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \lambda_k^{\frac{2(p-1)}{p-2}} f\big(\lambda_k y + x_k, \lambda_k^{-\frac{2}{p-2}} v_k(y)\big) - h(\lambda_k y + x_k)\big(v_k(y)\big)^{p-1} \right| = 0$$

uniformemente em $y \in B_R(0)$.

Assim, temos que $\lambda_k^{\frac{2(p-1)}{p-2}} f\big(\lambda_k y + x_k, \lambda_k^{-\frac{2}{p-2}} v_k(y)\big)$ é uniformemente limitada (em k) na norma $L^q(B_R(0))$, $\forall q$. Então, por regularidade elíptica (ver, por exemplo, [13, Teorema 9.11]), as funções v_k são limitadas em $W^{2,q}\big(B_R(0)\big)$. Pelo Teorema de Morrey (ver, por exemplo, [13, Teorema 7.26]), escolhendo $q > N$, concluímos que as funções v_k são também limitadas em $C_{1,\beta}(B_R(0))$ para $0 < \beta < 1$.

Então, estas estimativas implicam que existe uma subsucessão $k_j \to +\infty$ tal que $v_{k_j} \to v$ em $W^{2,q}(B_R(0)) \cap C^{1,\beta}(B_R(0))$ e, pela convergência em espaços de Hölder, temos que $v(0) = 1$. Além disso, como

$$h(\lambda_{k_j} y + x_{k_j}) \to h(x_0) \text{ quando } k \to +\infty,$$

[(a)] O objetivo é obter um problema em $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{R}^N_+$. Assim, esta designação deve-se ao facto de (Ω_k) "explodir" e "tornar-se" em $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{R}^N_+$.

concluímos que $v(y)$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v(y) = h(x_0)\big(v(y)\big)^{p-1} & \text{em } B_R(0) \\ v(0) = 1. \end{cases} \tag{1.13}$$

Como R foi escolhido arbitrariamente, concluímos que (1.13) é válida em $\mathbb{R}^N$.

Por fim, pondo $w(y) := h(x_0)^{\frac{1}{p-2}} v(y)$, resulta que w satisfaz $-\Delta w = w^{p-1}$ em $\mathbb{R}^N$. Logo, pelo Teorema 1.4, $w \equiv 0$. No entanto, como $v(0) = 1$, temos que $w(0) \neq 0$ (recorde-se que $h > 0$), pelo que obtemos uma contradição.

Caso 2: $x_0 \in \partial\Omega$. Neste caso, iremos chegar a uma contradição com o Teorema 1.4 ou com o Teorema 1.5. Pela regularidade de Ω, podemos supor sem perda de generalidade que, perto de x_0, $\partial\Omega$ está contida no hiperplano $\{x_N = 0\}$. Seja d_k a distância de x_k a $\partial\Omega$, ou seja, $d_k = x_k \cdot e_N$. Para k suficientemente grande, verifica-se facilmente que v_k está bem definida em $H_k := B_{\delta/\lambda_k}(0) \cap \{y \in \mathbb{R}^N : y_N > -\frac{d_k}{\lambda_k}\}$ para algum $\delta > 0$ e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_k(y) = \lambda_k^{\frac{2(p-1)}{p-2}} f\big(\lambda_k y + x_k, \lambda_k^{-\frac{2}{p-2}} v_k(y)\big) & \text{em } H_k, \\ \quad v_k(0) = 1. \end{cases}$$

De seguida vamos ver que existe uma constante $\widetilde{C} > 0$ tal que $\frac{d_k}{\lambda_k} \geqslant \widetilde{C}$, para todo k. Como $(v_k)_k$ é limitada na norma L^∞, resulta por regularidade elíptica até à fronteira (ver, por exemplo, [13, Lema 9.12]) que $|\nabla v_k|_\infty$ é limitada em k. Logo, pelo Teorema do valor médio, temos em particular que

$$\left| v_k(0) - v_k\left(0, \dots, 0, -\frac{d_k}{\lambda_k}\right)\right| \leqslant C\frac{d_k}{\lambda_k},$$

ou seja,

$$1 - \lambda_k^{\frac{2}{p-2}} \sup_{x \in \partial\Omega} \varphi(x) \leqslant C\frac{d_k}{\lambda_k}.$$

Por hipótese, φ é limitada. Logo, como $\lambda_k \to 0$ quando $k \to +\infty$, concluímos que $(\frac{d_k}{\lambda_k})_k$ é limitada inferiormente por uma constante positiva.

Se $(\frac{d_k}{\lambda_k})_k$ não for limitada superiormente, então, para alguma subsucessão $k_j \to +\infty$, temos que $\frac{d_{k_j}}{\lambda_{k_j}} \to +\infty$. Logo, v_{k_j} está bem definida em $B_{d_{k_j}/\lambda_{k_j}}(0)$, com $v_{k_j}(0) = 1$, e pelos mesmos argumentos do caso 1 obtemos uma contradição.

Por outro lado, se $(\frac{d_k}{\lambda_k})$ for limitada superiormente, então, a menos de uma subsucessão, temos que $\frac{d_k}{\lambda_k} \to s > 0$. Neste caso,

$$\Omega_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \{y \in \mathbb{R}^N : y_N > -s\}$$

e, repetindo os argumentos de compacidade do caso 1, concluímos que existe uma subsucessão de v_k que converge para uma função v que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v = h(x_0) v^{p-1} & \text{em } \{y \in \mathbb{R}^N : y_N > -s\} \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

Para $x \in \partial\Omega$, temos que $v_k(y) = \lambda_k^{\frac{2}{p-2}}\varphi(x)$. Como φ é limitada e $\lambda_k \to 0$ quando $k \to +\infty$, resulta que $v(y) = 0$ em $\{y \in \mathbb{R}^N : y_N = -s\}$. Então, definindo a função $w(y) := h(x_0)^{\frac{1}{p-2}} v(y - s\, e_N)$, concluímos que w é solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = w^{p-1} & \text{em } \mathbb{R}^N_+ \\ \quad w = 0 & \text{em } \{y_N = 0\}. \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 1.5, $w \equiv 0$. No entanto, como $v(0) = 1$, temos que $w(0) \neq 0$, donde obtemos novamente uma contradição.

Assim, em qualquer caso, a suposição (1.10) conduziu a uma contradição, o que conclui a demonstração.

□

1.3 Aplicação do genus na obtenção de múltiplos pontos críticos

Já provámos, no Teorema 1.2, que o problema (1.1) admite, pelo menos, uma solução positiva. Vamos agora introduzir uma ferramenta topológica, o genus de Krasnoselski, que permitirá demonstrar a existência de uma infinidade de pontos críticos de certos funcionais pares e, consequentemente, de uma infinidade de soluções fracas de (1.1). Ao longo desta secção, seguiremos a referência [21].

Dado um espaço de Banach X, designemos por $\mathcal{S}$ a família dos conjuntos simétricos e fechados contidos em $X \setminus \{0\}$. Então definimos o genus de um conjunto $A \in \mathcal{S}$, que denotamos por $\gamma(A)$, como sendo o menor inteiro k tal que existe uma aplicação contínua $\varphi : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ **ímpar**. Se tal inteiro não existir, pomos $\gamma(A) = \infty$. Se $A = \emptyset$, então $\gamma(A) = 0$.

Enunciamos agora as principais propriedades do genus ($A, B \in \mathcal{S}$):

1. Se $x \in X \setminus \{0\}$, então $\gamma(\{x, -x\}) = 1$.
2. Se $\gamma(A) > 1$, então A tem infinitos pontos distintos.
3. Se existe uma aplicação contínua $f : A \to B$ ímpar, então $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$.
4. Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$.
5. $\gamma(A \cup B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$.
6. Se $A \in \mathcal{S}$ é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$, onde $N_\delta(A) := \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) \leqslant \delta\}$.
7. Dado um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ tal que $0 \in \Omega$, se existe um homeomorfismo ímpar de A sobre $\partial\Omega$, então $\gamma(A) = k$.
8. Se Y é um subespaço fechado de X com codimensão k (isto é, $X = X_k \oplus Y$ e $\dim X_k = k$) e $\gamma(A) > k$, então $A \cap Y \neq \emptyset$.

A demonstração destas propriedades encontra-se, por exemplo, em [21, Proposições 7.5 – 7.8].

Mostremos primeiro o resultado clássico de Lusternik-Schnirelmann [18], em que $X = \mathbb{R}^k$. Recordemos a notação $\mathbb{S}^{k-1} := \{x \in \mathbb{R}^k : x_1^2 + \cdots + x_k^2 = 1\}$, a esfera de raio 1 em $\mathbb{R}^k$.

Teorema 1.6 (Lusternik-Schnirelmann)**.** *Seja* $E \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ *um funcional par. Então* $E_{|\mathbb{S}^{k-1}}$ *tem, pelo menos, k pares distintos de pontos críticos.*

Demonstração. Para $1 \leqslant j \leqslant k$, defina-se

$$\Gamma_j := \{A \in \mathcal{S} : A \subset \mathbb{S}^{k-1} \text{ e } \gamma(A) \geqslant j\}.$$

Esta família de conjuntos tem as seguintes propriedades:

(*i*) Para qualquer $1 \leqslant j \leqslant k$, temos $\Gamma_j \neq \emptyset$.

(*ii*) $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k$.

(*iii*) Seja $\varphi \in C(\mathbb{S}^{k-1}, \mathbb{S}^{k-1})$ ímpar. Então, se $A \in \Gamma_j$, temos que $\varphi(A) \in \Gamma_j$.

(*iv*) Se $A \in \Gamma_j$ e $B \in \mathcal{S}$ for tal que $\gamma(B) \leqslant s < j$, então $\overline{A \setminus B} \in \Gamma_{j-s}$.

Com efeito, (*i*) resulta da propriedade 7 do genus, considerando Ω como a bola unitária de $\mathbb{R}^k$; (*ii*) sai trivialmente da definição dos conjuntos; (*iii*) é consequência da propriedade 3 do genus; por fim, (*iv*) obtém-se das propriedades 4 e 5 do genus, já que, como $A \subset \overline{A \setminus B} \cup B$ e $\gamma(B) < \infty$, se tem $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geqslant \gamma(A) - \gamma(B) \geqslant j - s$.

Defina-se agora, para $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$c_j := \inf_{A \in \Gamma_j} \max_{u \in A} E(u).$$

Então, da propriedade (*ii*) dos conjuntos Γ_j, vem que $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_k$. Vamos ver que os c_j são valores críticos de $E_{|\mathbb{S}^{k-1}}$ aos quais correspondem, pelo menos, k pares distintos de pontos críticos. Para isso, definindo

$$K_c := \{x \in \mathbb{S}^{k-1} : E(x) = c \text{ e } E'_{|\mathbb{S}^{k-1}}(x) = 0\} \in \mathcal{S}$$

e tendo em conta a propriedade 2 do genus, basta mostrar que, se tivermos $c := c_j = \cdots = c_{j+p}$ para algum $1 \leqslant j < k$ e para algum $p \geqslant 1$, então $\gamma(K_c) \geqslant p + 1$.

Nestas hipóteses, suponhamos, com vista a um absurdo, que $\gamma(K_c) \leqslant p$. Então, como K_c é compacto, da propriedade 6 do genus resulta que existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(K_c)) = \gamma(K_c) \leqslant p$. Logo, se $N := N_\delta(K_c) \cap \mathbb{S}^{k-1}$, temos que $\gamma(N) \leqslant p$ pela propriedade 4 do genus. Mas então, pelo Lema da deformação (cf. Teorema A.1 do Apêndice e Observação A.2(*ii*)) aplicado com $V = \mathrm{int}(N)$ e $\bar{\varepsilon} = 1$, concluímos que existe $0 < \varepsilon < 1$ e uma aplicação $\eta \in C([0,1] \times \mathbb{S}^{k-1}, \mathbb{S}^{k-1})$ com $\eta(t,u)$ ímpar em u que satisfaz

$$\eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus N) \subset A_{c-\varepsilon}, \text{ onde } A_r := \{x \in \mathbb{S}^{k-1} : E(x) \leqslant r\}. \tag{1.14}$$

Em seguida, escolha-se $A \in \Gamma_{j+p}$ tal que $\max_A E \leqslant c + \varepsilon$. Então, pela propriedade (iv) dos conjuntos Γ_j, como $N \in \mathcal{S}$ e $\gamma(N) \leqslant p < j + p$, temos que $\overline{A \setminus N} \in \Gamma_j$. Além disso, pela propriedade (iii), como $\eta(t, u)$ é contínua e ímpar, $\eta(1, \overline{A \setminus N}) \in \Gamma_j$. Mas então, por (1.14) e pela definição de c,

$$c \leqslant \max_{\eta(1,\overline{A\setminus N})} E \leqslant c - \varepsilon,$$

o que é absurdo. Logo $\gamma(K_c) \geqslant p + 1$, como pretendíamos.

□

Observação 1.7. Facilmente se verifica que se pode obter uma caracterização equivalente dos níveis c_j como sendo os números para os quais os conjuntos A_r mudam de genus. Com efeito, para $1 \leqslant j \leqslant k$, defina-se

$$\overline{c_j} := \inf\{r \in \mathbb{R} : \gamma(A_r) \geqslant j\}.$$

Então, se $r > \overline{c_j}$, tem-se $\gamma(A_r) \geqslant j$. Logo $A_r \in \Gamma_j$ e $c_j \leqslant \max_{A_r} E = r$, pelo que concluímos que $c_j \leqslant \overline{c_j}$. Suponhamos, por absurdo, que se tem $c_j < \overline{c_j}$. Então, pondo $c = (c_j + \overline{c_j})/2$, a definição de c_j implica que existe um conjunto $A \in \Gamma_j$ tal que $c_j \leqslant \max_A E \leqslant c$. Pela propriedade 4 do genus, como $A \subset A_c$, obtemos $\gamma(A_c) \geqslant \gamma(A) \geqslant j$. Mas então $c < \overline{c_j}$, o que é absurdo pela definição de $\overline{c_j}$. Logo $c_j = \overline{c_j}$.

Apresentamos agora uma generalização do teorema anterior a espaços de dimensão infinita. Nesta caso, para que seja possível aplicar um argumento semelhante ao da demonstração anterior, é necessário acrescentar algumas hipóteses. Defina-se, num espaço de Hilbert H com norma $\|\cdot\|$, o conjunto $\partial B_r := \{x \in H : \|x\| = r\}$.

Teorema 1.8. *Sejam H um espaço de Hilbert de dimensão infinita e $E \in C^1(H, \mathbb{R})$ um funcional par. Suponhamos que $r > 0$ e que $E_{|\partial B_r}$ satisfaz $(PS)_{loc}$*[(b)] *e é limitado inferiormente. Então $E_{|\partial B_r}$ tem uma infinidade de pares distintos de pontos críticos.*

Demonstração. Defina-se $\Gamma_j := \{A \in \mathcal{S} : A \subset \partial B_r \text{ e } \gamma(A) \geqslant j\}$, para $j \in \mathbb{N}$. Então, facilmente se verifica que estes conjuntos também satisfazem as propriedades (i)-(iv) da demonstração do Teorema 1.6 (com ∂B_r em vez de $\mathbb{S}^{k-1}$). Para $j \in \mathbb{N}$, definimos os níveis de Lusternik-Schnirelmann como

$$c_j := \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A} E(u)$$

Como $E_{|\partial B_r}$ é limitado inferiormente, vem que $c_1 > -\infty$. Além disso, como $E_{|\partial B_r}$ satisfaz $(PS)_{loc}$, resulta que $K_c := \{u \in \partial B_r : E(u) = c \text{ e } E'_{|\partial B_r}(u) = 0\}$ é compacto para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Assim, tendo em conta a observação A.2 do Apêndice, é possível aplicar novamente o argumento usado na demonstração do Teorema 1.6, o que conclui a prova.

□

(b) Dizemos que E satisfaz $(PS)_{loc}$ para $c \in \mathbb{R}$ se existe $\delta > 0$ tal que toda a sucessão $(u_k)_k$ tal que $|E(u_k) - c| < \delta$ e $E'(u_k) \to 0$ tem uma subsucessão convergente.

Vamos agora aplicar o Teorema 1.8 para mostrar que existe uma sucessão de pares distintos de soluções fracas de (1.1). Consideremos primeiro o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 1$) é um domínio regular limitado e $2 \leqslant p < 2^*$.

No espaço $H := H_0^1(\Omega)$, seja $E \in C^1(H, \mathbb{R})$ o funcional par dado por

$$E(u) := -\frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx.$$

Observamos que, se u for um ponto crítico de $E_{|\partial B_1}$, temos que

$$\exists\, \mu \in \mathbb{R} : \quad -\int_\Omega |u|^{p-2} u\varphi \, dx = \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H,$$

o que significa que u é uma solução fraca de (1.15) para $\lambda = -\frac{1}{\mu}$. Assim, se mostrarmos que $E_{|\partial B_1}$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição $(PS)_{loc}$, concluímos do Teorema 1.8 que existe uma infinidade de pares de soluções fracas do problema (1.15).

Vejamos primeiro que $E_{|\partial B_1}$ é limitado inferiormente. Com efeito, pela injeção de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$E(u) = -\frac{1}{p}|u|_p^p \geqslant -\frac{C}{p}\|u\|^p = -\frac{C}{p} > -\infty, \quad \forall u \in \partial B_1.$$

Suponhamos agora que, dado $c \in \mathbb{R}$, $(u_k)_k \subset \partial B_1$ é uma sucessão que verifica $|E(u_k) - c| < \delta$ para algum $\delta > 0$ e $E'_{|\partial B_1}(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$, isto é,

$$E'_{|\partial B_1}(u_k) = E'(u_k) - (E'(u_k)u_k)u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0. \tag{1.16}$$

Então, como $(u_k)_k$ é limitada e E' é compacto (pelo Teorema A.9 do Apêndice), existe uma subsucessão de $(u_k)_k$ que converge fracamente para $u \in H$, para a qual se tem

$$E'_{|\partial B_1}(u_k) \to E'(u) - (E'(u)u)u = 0.$$

Se $E(u) \neq 0$, então $u \neq 0$, pelo que temos $E'(u)u \neq 0$ e, consequentemente, $E'(u_k)u_k \neq 0$ para k suficientemente grande. Então, por (1.16), concluímos que

$$u_k = (E'(u_k)u_k)^{-1}(E'_{|\partial B_1}(u_k) - E'(u_k))$$

tem uma subsucessão convergente. Assim, mostrámos que $E_{|\partial B_1}$ satisfaz $(PS)_{loc}$ para todo $c \neq 0$. Como se tem $E(u) < 0$ para qualquer $u \neq 0$, resulta que $c_k < 0$ para todo k.

Então, pelo Teorema 1.8, concluímos que (1.15) possui uma sucessão de pares distintos de soluções fracas $(\lambda_k, \pm w_k)_k$ em $\mathbb{R} \times \partial B_1$, onde $\lambda_k := -(E'(w_k)w_k)^{-1}$, tendo-se

$E'(w_k) + \lambda_k^{-1} w_k = 0$. Logo, $v_k := \lambda_k^{\frac{1}{p-2}} w_k$ é solução fraca de (1.1). Além disso, por [21, Corolário 8.18], temos

$$E(w_k) = -\int_\Omega |w_k|^p \, dx \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Como

$$E'(w_k) w_k = -\int_\Omega |w_k|^p \, dx = -\frac{1}{\lambda_k},$$

resulta que $\lambda_k \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. Consequentemente, temos

$$\|v_k\| = \lambda_k^{\frac{1}{p-2}} \|w_k\| = \lambda_k^{\frac{1}{p-2}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty,$$

donde concluímos que $(\pm v_k)_k \subset H$ é uma sucessão de pares distintos de soluções fracas de (1.1).

Observação 1.9. Como, para as soluções v_k encontradas, se tem $\|v_k\| \to \infty$, então também $|v_k|_\infty \to \infty$. Mas, como há limitações *a priori* para soluções positivas (cf. Secção 1.2), concluímos que a sucessão contém um número finito de soluções positivas (ou negativas) e uma infinidade de soluções que trocam de sinal. Como veremos nos próximos capítulos, no caso dos sistemas a obtenção deste tipo de resultados depende dos termos de cooperação/competição.

Capítulo 2

Multiplicidade de soluções positivas de um sistema elíptico

2.1 Apresentação do problema

Consideremos o sistema elíptico não linear com m equações

$$\begin{cases} -\Delta u_i + u_i = \mu |u_i|^{2p-2} u_i + \beta |u_i|^{p-2} u_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |u_j|^p \quad \text{em } \Omega, \\ u_i > 0 \text{ em } \Omega, \quad u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \qquad i = 1, ..., m. \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $\mu > 0$, $\beta < 0$, $m \geqslant 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular limitado para $N \geqslant 1$ ou radialmente simétrico (possivelmente ilimitado) para $N \geqslant 2$, e

$$2 \leqslant p < \frac{2^*}{2} = \begin{cases} \frac{N}{N-2} & \text{para } N \geqslant 3 \\ \infty & \text{para } N = 1, 2. \end{cases}$$

Observamos que o sistema (2.1) é invariante para S_m, o grupo de permutações de grau m sobre $\mathbb{R}^m$. Isto significa que se $(u_1, \ldots, u_m)$ for uma solução de (2.1), então $\tau(u_1, \ldots, u_m)$ também é, para qualquer permutação $\tau \in S_m$. No entanto, veremos mais adiante que para utilizar esta propriedade de simetria na teoria de pontos críticos é mais conveniente trabalhar com um subgrupo de S_m, nomeadamente Z_m, o grupo cíclico de ordem m.

Seja σ a permutação em $\mathbb{R}^m$ dada por

$$(u_1, \ldots, u_m) \mapsto \sigma(u_1, \ldots, u_m) = (u_2, \ldots, u_m, u_1).$$

Então Z_m é o grupo gerado por σ, isto é,

$$Z_m = \langle \sigma \rangle = \{\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^m = \text{id}\}.$$

Definimos uma Z_m-órbita de $x \in \mathbb{R}^m$ como o conjunto formado por $\sigma^i x$ para $i = 1, \ldots, m$.

Neste capítulo vamos provar o seguinte teorema:

Teorema 2.1.

(a) Se $\beta \leqslant -\frac{\mu}{m-1}$*, então o sistema* (2.1) *tem uma sucessão de* Z_m*-órbitas distintas de soluções positivas.*

(b) Para todo $k \in \mathbb{N}$*, existe um* $\beta_k \in]-\frac{\mu}{m-1}, 0[$ *tal que, para* $\beta \in]-\frac{\mu}{m-1}, \beta_k[$*, o sistema* (2.1) *tem, pelo menos,* k Z_m*-órbitas de soluções positivas.*

Observação 2.2. No sistema (2.1), o termo com β faz a ligação entre as componentes de cada equação. Intuitivamente, podemos dizer que o sinal de β regula o tipo de interação: cooperação se $\beta > 0$, competição se $\beta < 0$. Assim, este teorema mostra que, ao contrário do que acontece no caso em que só temos uma equação (cf. Secção 1.3), com um sistema é possível obter uma infinidade de soluções positivas, desde que haja "competição" suficiente.

Para provar o Teorema 2.1, seguiremos a estratégia usada por Tian e Wang em [24] para o caso $p = 2$ e $N \leqslant 3$. A demonstração baseia-se numa teoria do tipo Lusternik-Schnirelman adaptada a um índice de Z_m e na construção de uma variedade de Nehari que depende de β.

2.2 Formulação variacional e variedade de Nehari

Denotamos indistintamente por $\mathcal{H}$ ora o espaço $[H_0^1(\Omega)]^m$, no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, ora o espaço $[H_{0,r}^1(\Omega)]^m$, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ for radialmente simétrico. Observe-se que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v) := \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega (\nabla u_i \cdot \nabla v_i + u_i v_i)\, \mathrm{d}x,$$

para $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{H}$.

Associamos ao sistema (2.1) o seguinte funcional:

$$E(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2 - \frac{\mu}{2p}\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{m} (u_i^+)^{2p}\right) \mathrm{d}x - \frac{\beta}{2p}\int_\Omega \left(\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{m} |u_i|^p |u_j|^p\right) \mathrm{d}x$$

para $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{H}$, onde, para todo $i = 1, \ldots, m$, denotamos por $u_i^+ = \max\{u_i, 0\}, u_i^- = -\min\{u_i, 0\}$ e

$$\|u_i\|^2 := \|u_i\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega (|\nabla u_i|^2 + u_i^2)\, \mathrm{d}x.$$

Denotamos ainda a norma-L^s de uma função $u \in L^s(\Omega)$ como $|u|_s = (\int_\Omega |u|^s\, \mathrm{d}x)^{1/s}$.

O funcional E está bem definido e é de classe $C^2(\mathcal{H},\mathbb{R})$ em virtude das injeções de Sobolev $H_0^1(\Omega), H_{0,r}^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ e do Teorema A.9 do Apêndice. Para $u, v \in \mathcal{H}$ tem-se que

$$\begin{aligned} E'(u)v = (u,v) - \mu \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m (u_i^+)^{2p-1} v_i \right) \mathrm{d}x \\ - \beta \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m |u_i|^{p-2} u_i v_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^m |u_j|^p \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Por uma questão de simplificação de notação, deixaremos a partir de agora de usar a notação dx nos integrais.

Dizemos que um ponto crítico u de E é não trivial se todas as suas componentes forem não nulas, isto é, $u_i \not\equiv 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$. Ao determinar pontos críticos não triviais de E vamos obter soluções do problema (2.1).

Lema 2.3. *Qualquer ponto crítico não trivial de E em $\mathcal{H}$ é uma solução clássica de (2.1).*

Demonstração. Seja u um ponto crítico não trivial de E em $\mathcal{H}$. Então, para uma função arbitrária $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{H}$, temos

$$E'(u)\hat{v}_i = 0 \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant m, \text{ onde } \hat{v}_i := (0, \ldots, v_i, \ldots, 0),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i + u_i v_i - \mu \int_\Omega (u_i^+)^{2p-1} v_i - \beta \int_\Omega \left(|u_i|^{p-2} u_i v_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^m |u_j|^p \right) = 0.$$

Logo, u é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u_i + u_i = \mu (u_i^+)^{2p-1} + \beta |u_i|^{p-2} u_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^m |u_j|^p \quad \text{em } \Omega, \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Multiplicando a equação anterior por $u_i^- \in \mathcal{H}$ e integrando por partes em Ω, obtemos

$$-\int_\Omega |\nabla u_i^-|^2 - \int_\Omega (u_i^-)^2 = \mu \int_\Omega (u_i^+)^{2p-1} u_i^- - \beta \int_\Omega \left(|u_i|^{p-2} (u_i^-)^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^m |u_j|^p \right).$$

Como $u_i^+ u_i^- \equiv 0$, resulta que

$$\int_\Omega |\nabla u_i^-|^2 + \int_\Omega \left(1 - \beta |u_i|^{p-2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^m |u_j|^p \right) (u_i^-)^2 = 0.$$

Como $\beta < 0$, estas equações implicam que $u_i^- \equiv 0$ para cada i, ou seja, $u_i \geqslant 0$ para $i = 1, \ldots, m$. Pela teoria standard de regularidade elíptica (ver, por exemplo, [13]), cada componente u_i de u é uma função de classe C^2. Como $u_i \not\equiv 0 \; \forall i$, então, pelo Teorema A.5 do Apêndice, $u_i > 0$ em Ω para $i = 1, \ldots, m$. Concluímos que u é uma solução clássica de (2.1).

$\square$

Observação 2.4. Neste capítulo, a restrição $p \geqslant 2$ é feita para que seja possível utilizar o Teorema A.5 do Apêndice, que é consequência do princípio do máximo forte. De facto, para $1 < p < 2$, o Teorema 2.1 ainda é válido se substituirmos "soluções positivas"por "soluções não triviais não negativas".

Introduza-se o seguinte conjunto do tipo Nehari:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : &= \{u \in \mathcal{H} : E'(u)\hat{u}_i = 0, u_i \not\equiv 0, i = 1, ..., m\} \\ &= \Big\{u \in \mathcal{H} : \|u_i\|^2 - \mu \int_\Omega (u_i^+)^{2p} - \beta \int_\Omega |u_i|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |u_j|^p = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_i \not\equiv 0, i = 1, ..., m\Big\}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Todos os pontos críticos não triviais de E estão contidos em $\mathcal{M}$. De facto, se u for um ponto crítico não trivial de E, temos que $E'(u)v = 0$ para qualquer $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{H}$. Assim, basta escolher, para cada i, $v = \hat{v}_i = (0, \ldots, v_i, \ldots, 0)$.

Denote-se por $E_{\mathcal{M}}$ a restrição do funcional E ao conjunto $\mathcal{M}$.

Lema 2.5.

(i) $\mathcal{M}$ *é uma subvariedade de* $\mathcal{H}$ *de classe* C^2.

(ii) Para qualquer $u \in \mathcal{M}$, $E(u) = \frac{p-1}{2p} \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2$.

(iii) Se u *for um ponto crítico de* $E_{\mathcal{M}}$, *então* u *é um ponto crítico não trivial de* E.

(iv) $E_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. (i) Definimos o funcional $F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^m$ (pelo Teorema A.9 do Apêndice, F é de classe C^2) como

$$F(u) = \begin{bmatrix} F_1(u) \\ \vdots \\ F_m(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|u_1\|^2 - \mu \int_\Omega (u_1^+)^{2p} - \beta \int_\Omega |u_1|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{m} |u_j|^p \\ \vdots \\ \|u_m\|^2 - \mu \int_\Omega (u_m^+)^{2p} - \beta \int_\Omega |u_m|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{m} |u_j|^p \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Então $\mathcal{M}$ pode ser escrita como

$$\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{H} : F(u) = 0_{\mathbb{R}^m}, u_i \not\equiv 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Para $u \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i(u)}{\partial u_i} u_i &= 2\|u_i\|^2 - 2p\mu \int_\Omega (u_i^+)^{2p} - p\beta \int_\Omega |u_i|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^m |u_j|^p \\ &= 2(1-p)\|u_i\|^2 + p\beta \int_\Omega |u_i|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^m |u_j|^p < 0, \quad \forall i = 1, \dots, m\end{aligned} \tag{2.4}$$

e

$$\frac{\partial F_j(u)}{\partial u_i} u_i = -p\beta \int_\Omega |u_j|^p |u_i|^{p-2} u_i^2 = -p\beta \int_\Omega |u_j|^p |u_i|^p, 1 \leqslant i \neq j \leqslant m$$

Consequentemente, a matriz simétrica

$$T_u := \begin{bmatrix} \partial_{u_1} F_1(u) u_1 & \dots & \partial_{u_1} F_m(u) u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{u_m} F_1(u) u_m & \dots & \partial_{u_m} F_m(u) u_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1-p)\|u_1\|^2 + p\beta \int_\Omega |u_1|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^m |u_j|^p & \dots & -p\beta \int_\Omega |u_m|^p |u_1|^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -p\beta \int_\Omega |u_1|^p |u_m|^p & \dots & 2(1-p)\|u_m\|^2 + p\beta \int_\Omega |u_m|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^m |u_j|^p \end{bmatrix}$$

é uma matriz estritamente diagonal dominante (ver a Definição A.7 do Apêndice), já que, como $p > 1$, $\beta < 0$ e $u \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial F_i(u)}{\partial u_i} u_i\right| &= \left|2(1-p)\|u_i\|^2 + p\beta \int_\Omega |u_i|^p \sum_{j=1, j\neq i}^m |u_j|^p\right| \\ &> \left|\sum_{j=1, j\neq i}^m \Big(-p\beta \int_\Omega |u_i|^p |u_j|^p\Big)\right| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^m \left|\frac{\partial F_j(u)}{\partial u_i} u_i\right|.\end{aligned}$$

Como todos os elementos da diagonal principal são negativos, pelo Corolário A.8 do Apêndice vem que T_u é definida negativa. Logo, os vetores $\partial_{u_1} F(u)\hat{u}_1, \dots, \partial_{u_m} F(u)\hat{u}_m$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^m$, pelo que $F'(u) : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva. Concluímos que $\mathcal{M}$ é uma subvariedade C^2 de $\mathcal{H}$.

(ii) Para $u \in \mathcal{M}$,

$$
\begin{aligned}
E(u) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\|u_i\|^2 - \frac{\mu}{2p}\int_\Omega \sum_{i=1}^{m}(u_i^+)^{2p} - \frac{\beta}{2p}\int_\Omega \sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{m} |u_i|^p|u_j|^p \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\|u_i\|^2 - \frac{1}{2p}\left(\sum_{i=1}^{m}\|u_i\|^2 - \beta\int_\Omega \sum_{i=1}^{m}|u_i|^p \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}|u_j|^p\right) \\
&\quad - \frac{\beta}{2p}\int_\Omega \sum_{i=1}^{m}|u_i|^p \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}|u_j|^p \\
&= \frac{p-1}{2p}\sum_{i=1}^{m}\|u_i\|^2.
\end{aligned}
$$

(iii) Se $u \in \mathcal{M}$ for um ponto crítico de $E_{\mathcal{M}}$, então existem multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tais que

$$
\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i'(u) = E'(u) \text{ em } \mathcal{H}^*, \text{ o espaço dual de } \mathcal{H}. \tag{2.5}
$$

Assim, basta ver que $\lambda_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$. Aplicando (2.5) a $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m$, sucessivamente, obtemos

$$
T_u \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.6}
$$

porque, pela definição de $\mathcal{M}$, temos que $E'(u)\hat{u}_i = 0$, $\forall i$. Como T_u é definida negativa, temos, em particular, que $\det(T_u) \neq 0$, donde concluímos que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

(iv) Seja $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(u_1^k, \dots, u_m^k)\}_k \subset \mathcal{M}$ uma sucessão de Palais-Smale para $E_{\mathcal{M}}$, isto é, $E_{\mathcal{M}}(u^k)$ é limitada e $E'_{\mathcal{M}}(u^k) \to 0$ em $\mathcal{H}^*$. Queremos ver que $\{u^k\}_k$ tem uma subsucessão convergente.

Pela alínea (ii), a sucessão $\{u^k\}_k$ é limitada em $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ é reflexivo, existe uma subsucessão (que por simplicidade ainda denotamos por $\{u^k\}_k$) que converge fracamente em $\mathcal{H}$ para $w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{H}$.

Como $\{u^k\}_k \subset \mathcal{M}$ e $\beta < 0$, temos que, para qualquer k,

$$
\|u_i^k\|^2 \leqslant \mu|(u_i^k)^+|_{2p}^{2p} \qquad \forall i = 1, \dots, m.
$$

Usando a injeção de Sobolev $H_0^1(\Omega), H_{0,r}^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, resulta que

$$
\mu|(u_i^k)^+|_{2p}^{2p} \leqslant \mu C\|u_i^k\|^{2p} \qquad \forall i = 1, \dots, m,
$$

para uma constante $C > 0$, donde

$$\|u_i^k\|^{2p-2} \geqslant \frac{1}{\mu C}, \quad \text{isto é,} \quad \|u_i^k\|^2 \geqslant \left(\frac{1}{\mu C}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0. \tag{2.7}$$

Concluímos então que

$$\mu |w_i^+|_{2p}^{2p} = \lim_{k\to\infty} \mu |(u_i^k)^+|_{2p}^{2p} \geqslant \liminf_{k\to\infty} \|u_i^k\|^2 - \limsup_{k\to\infty} \beta \int_\Omega |u_i^k|^p \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m |u_j^k|^p > 0,$$

ou seja, $w_i^+ \neq 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Para cada $k \geqslant 1$, existem multiplicadores de Lagrange λ_i^k, com $i = 1, \dots, m$, tais que

$$o(1) = E'_{\mathcal{M}}(u^k) = E'(u^k) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^k F_i'(u^k) \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{2.8}$$

Aplicando $E'_{\mathcal{M}}(u^k)$ a $\hat{u}_i^k$ para $i = 1, \dots, m$ e usando o facto de $\{u^k\}_k$ ser limitada em $\mathcal{H}$, vem

$$\begin{aligned}
o(1) &= \begin{bmatrix} E'(u^k)\hat{u}_1^k - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k F_i'(u^k)\right) \hat{u}_1^k \\ \vdots \\ E'(u^k)\hat{u}_m^k - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k F_i'(u^k)\right) \hat{u}_m^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k F_i'(u^k)\right) \hat{u}_1^k \\ \vdots \\ -\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k F_i'(u^k)\right) \hat{u}_m^k \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} \partial_{u_1^k} F_1 u_1^k & \dots & \partial_{u_1^k} F_m u_1^k \\ \vdots & & \\ \partial_{u_m^k} F_1 u_m^k & \dots & \partial_{u_m^k} F_m u_m^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \vdots \\ \lambda_m^k \end{bmatrix} \\
&= -T_{u^k} \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \vdots \\ \lambda_m^k \end{bmatrix} = \big(-T_w + o(1)\big) \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \vdots \\ \lambda_m^k \end{bmatrix} \quad \text{quando } k \to \infty.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Como $\|\cdot\|$ é fracamente semicontínua inferiormente,

$$\|w_i\|^2 - \beta \int_\Omega |w_i|^p \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m |w_j|^p \leqslant \mu \int_\Omega |w_i^+|^{2p} \quad i = 1, \dots, m$$

Do mesmo modo como foi feito em (i), prova-se que T_w é definida negativa. Logo, por (2.9),

$$\lambda_i^k \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty, \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Como $F_i'(u^k)$ é limitada em $\mathcal{H}^*$, (2.8) implica que $E'(u^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ em $\mathcal{H}^*$, ou seja, $E'(u^k)v \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}$. Da convergência fraca $u^k \rightharpoonup w$ resulta que $E'(w)v = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}$, isto é, w é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta w_i + w_i = \mu(w_i^+)^{2p-1} + \beta|w_i|^{p-2}w_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |w_j|^p \quad \text{em } \Omega, \\ w_i > 0 \text{ em } \Omega, \quad u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \qquad i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por w_1 e integrando por partes em Ω, obtemos

$$\begin{aligned} \|w_1\|^2 &= \mu|w_1^+|_{2p}^{2p} + \beta \int_\Omega |w_1|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |w_j|^p \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\mu|(u_1^k)^+|_{2p}^{2p} + \beta \int_\Omega |u_1^k|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |u_j^k|^p \right) = \lim_{k\to\infty} \|u_1^k\|^2, \end{aligned}$$

visto que $u^k \in \mathcal{M}$ para qualquer k. Isto implica que $u_1^k \to w_1$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$, $H_{0,r}^1(\Omega)$. Analogamente se vê que $u_i^k \to w_i$, para $i = 2, \ldots, m$. Logo, temos que $u^k \to w$ fortemente em $\mathcal{H}$, pelo que $E_{\mathcal{M}}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

□

Consideremos agora os conjuntos de nível na variedade de Nehari

$$\mathcal{M}^c := \{u \in \mathcal{M} : E(u) \leqslant c\} \text{ para } c \in \mathbb{R}$$

e os conjuntos dos pontos críticos de E em $\mathcal{M}^c$

$$\begin{aligned} K_c : &= \{u \in \mathcal{H} : E(u) = c, E'(u) = 0\} \\ &= \{u \in \mathcal{H} : E_{\mathcal{M}}(u) = c, E_{\mathcal{M}}'(u) = 0\}. \end{aligned}$$

Observamos que o funcional E é invariante para a ação do grupo simétrico S_m, isto é,

$$E(u_1, \ldots, u_m) = E(\tau(u_1, \ldots, u_m)), \quad \forall (u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{H}, \ \forall \tau \in S_m.$$

Como consequência, esta invariância é herdada pelos conjuntos $\mathcal{M}, \mathcal{M}^c$ e K_c. Em particular, tanto E como os conjuntos referidos são invariantes para a ação de σ, o gerador do grupo cíclico Z_m. A importância desta última afirmação advém da seguinte observação.

Observação 2.6. Para aplicar a teoria de Lusternik-Schnirelmann, é fundamental evitar os pontos fixos das permutações do grupo simétrico para o qual o funcional é invariante. No caso em que se tem apenas duas equações, o grupo S_2 coincide com Z_2, sendo constituído apenas pela identidade e pela reflexão $\sigma : (u,v) \mapsto (v,u)$. Quando se aumenta o número de equações, o grupo de permutações S_m é demasiado grande, tornando-se difícil aplicar a teoria a esta simetria. No entanto, conforme foi observado em [24], conseguimos ultrapassar esta dificuldade considerando apenas as permutações geradas por σ, ou seja, passando a trabalhar com um subgrupo de S_m. Desta forma, para além de reduzirmos o número de permutações (e, conquentemente, de pontos fixos), consegue-se estabelecer uma teoria do índice que generaliza de forma natural o genus de Krasnoselski, como veremos na secção seguinte.

Consideremos agora os divisores próprios de m

$$1 = q_0 < q_1 < \cdots < q_a < m, \text{ para um inteiro } a \geqslant 0$$

e sejam $m = m_0 > m_1 > \cdots > m_a > 1$ dados por $m_b := m/q_b$, para cada $b = 0, 1, \ldots, a$. Observamos que os pontos fixos de σ^{q_b} são da forma $(u_1, \ldots, u_{q_b}, \ldots, u_1, \ldots, u_{q_b})$. Além disso, se q não for um divisor próprio de m, os pontos fixos de σ^q são os mesmos que os de σ.

Definição 2.7. Para os conjuntos de pontos fixos de σ^{q_b}, definimos a energia mínima de E como sendo

$$c^{q_b}(\beta) := \inf\{E(u) : u \in \mathcal{M}, \sigma^{q_b}(u) = u\}, \quad b = 0, 1, \ldots, a$$

e $c^{q_b}(\beta) = \infty$ se σ^{q_b} não tiver pontos fixos em $\mathcal{M}$.

O lema que se segue realça a importância da dependência do parâmetro β nesta definição.

Lema 2.8.

$$c^{q_b}(\beta) = \infty \textit{ para } \beta \leqslant -\frac{\mu}{m_b - 1} \textit{ e } \lim_{\beta \to -\mu/(m_b-1)} c^{q_b}(\beta) = \infty$$

para $b = 0, 1, \ldots, a$.

Demonstração. Para um b fixo, consideremos $u \in \mathcal{M}$ tal que $\sigma^{q_b}(u) = u$, isto é, $u = (u_1, \ldots, u_{q_b}, \ldots, u_1, \ldots, u_{q_b})$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_i\|^2 &= \mu|u_i^+|_{2p}^{2p} + \beta \int_\Omega |u_i|^p \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |u_j|^p \\
&= \mu|u_i^+|_{2p}^{2p} + \beta(m_b - 1)|u_i|_{2p}^{2p} + \beta m_b \int_\Omega \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q_b} |u_i|^p |u_j|^p \\
&\leqslant (\mu + \beta(m_b - 1))|u_i^+|_{2p}^{2p} + \beta(m_b - 1)|u_i^-|_{2p}^{2p} \\
&\leqslant (\mu + \beta(m_b - 1))|u_i^+|_{2p}^{2p},
\end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, m$. Se $\beta \leqslant -\frac{\mu}{m_b - 1}$, então obtemos que

$$\|u_i\|^2 \leqslant (\mu + \beta(m_b - 1))|u_i^+|_{2p}^{2p} \leqslant 0.$$

Daqui resulta que $\|u_i\| = 0$ para todo o $i = 1, \ldots, m$, donde concluímos que $\|u\| = 0$. Mas $0 \notin \mathcal{M}$, portanto σ^{q_b} não tem pontos fixos em $\mathcal{M}$. Por definição, obtém-se $c^{q_b}(\beta) = \infty$.

Por outro lado, se $-\frac{\mu}{m_b - 1} < \beta < 0$, então

$$\begin{aligned} \|u_i\|^2 &\leqslant (\mu + \beta(m_b - 1))|u_i^+|_{2p}^{2p} \\ &\leqslant C(\mu + \beta(m_b - 1))\|u_i\|^{2p}, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é a constante independente de β associada à injeção de Sobolev $H_0^1(\Omega), H_{0,r}^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$. Concluímos que

$$\|u_i\|^{2p-2} \geqslant \frac{1}{C(\mu + \beta(m_b - 1))} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, m,$$

donde, pela alínea (ii) do Lema 2.5, resulta que

$$\begin{aligned} E(u) = \frac{p-1}{2p} \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2 &\geqslant \frac{p-1}{2p}\|u_1\|^2 \\ &\geqslant \frac{p-1}{2p}\left(\frac{1}{C(\mu + \beta(m_b - 1))}\right)^{\frac{1}{p-1}} \xrightarrow[\beta \to -\frac{\mu}{m_b - 1}]{} \infty. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.9. *Se $\beta \leqslant -\frac{\mu}{m_b - 1}$, então $\mathcal{M}$ não possui pontos fixos de σ^{q_d} para $d = 0, 1, \ldots, b$.*

Demonstração. Se $d \leqslant b$, então

$$m_d = \frac{m}{q_d} \geqslant \frac{m}{q_b} = m_b$$

pelo que

$$\beta \leqslant -\frac{\mu}{m_b - 1} \leqslant -\frac{\mu}{m_d - 1}.$$

Então, pelo Lema 2.8, $c^{q_d}(\beta) = \infty$ para qualquer $d = 0, 1, \ldots, b$, ou seja, $\mathcal{M}$ não possui pontos fixos de σ^{q_d} para qualquer $d = 0, 1, \ldots, b$.

□

Enunciamos agora o Lema da deformação σ-equivariante:

Lema 2.10. *Seja $c \in \mathbb{R}$ e seja $V \subset \mathcal{M}$ uma vizinhança de K_c relativamente aberta e σ-invariante. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma deformação de classe C^1 $\eta : [0, 1] \times \mathcal{M}^{c+\varepsilon} \setminus V \to \mathcal{M}^{c+\varepsilon}$ tal que, para quaisquer $u \in \mathcal{M}^{c+\varepsilon} \setminus V$ e $t \in [0, 1]$,*

$$\eta(0, u) = u, \quad \eta(1, u) \in \mathcal{M}^{c-\varepsilon} \quad e \quad \sigma[\eta(t, u)] = \eta(t, \sigma u). \tag{2.10}$$

Demonstração. Cf. [24, Lema 2.4]. □

2.3 Índice de Z_m

Nesta secção definimos um índice associado ao grupo cíclico $Z_m = \langle \sigma \rangle$ que generaliza o genus de Krasnoselski e estabelecemos os resultados necessários para aplicar a teoria de Lusternik-Schnirelmann.

Definição 2.11. Para qualquer subconjunto $A \subset \mathcal{M}$ fechado e σ-invariante, definimos o índice $\gamma(A)$ como sendo o menor $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que existe uma aplicação contínua $h : A \to \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ que satisfaz

$$h(\sigma u) = e^{i\frac{2\pi}{m}} h(u), \qquad \forall\, u \in A. \tag{2.11}$$

Se não existir tal aplicação, pomos $\gamma(A) = \infty$. Definimos $\gamma(\emptyset) = 0$.

Observação 2.12. No caso em que $k = 1$, a propriedade (2.11) da aplicação h corresponde a identificar a permutação σ a uma rotação de $2\pi/m$ no plano complexo. Em geral, pretendemos que h represente de alguma maneira a ação de σ em $\mathbb{C}^k \setminus \{0\}$, sendo esta definição uma generalização natural do genus definido em [5] para o caso em que $m = 2$, onde se requer que a função h verifique $h(\sigma(u, v)) = -h(u, v)$.

Em particular, se A contiver um ponto fixo de σ^{q_b} para um $b = 0, 1, \ldots, a$, então $\gamma(A) = \infty$. De facto, se $u \in A$ for tal que $\sigma^{q_b}(u) = u$, então $h(\sigma^{q_b} u) = h(u)$. Mas, por definição, $h(\sigma^{q_b} u) = e^{i2q_b\pi/m} h(u)$ e, como $q_b < m$, $e^{i2q_b\pi/m} \neq 1$, donde obtemos uma contradição.

Em seguida enumeramos algumas propriedades deste índice.

Lema 2.13. *Sejam $A, B \subset \mathcal{M}$ conjuntos fechados e σ-invariantes.*

(i) *Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$.*

(ii) *$\gamma(A \cup B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$.*

(iii) *Se $g : A \to \mathcal{M}$ for uma aplicação contínua e σ-equivariante, i.e.,*

$$g(\sigma u) = \sigma g(u), \quad \forall u \in A,$$

então $\gamma(A) \leqslant \gamma\big(\overline{g(A)}\big)$.

(iv) *Se S é a fronteira de uma vizinhança de zero limitada e σ-invariante num espaço vetorial normado complexo de dimensão k e $\psi : S \to \mathcal{M}$ é uma aplicação contínua tal que*

$$\psi(e^{i\frac{2\pi}{m}} y) = \sigma\psi(y), \quad \forall y \in S,$$

então $\gamma(\psi(S)) \geqslant k$.

Se A não contiver pontos fixos de σ^{q_b} para $b = 0, 1 \ldots, a$, então:

(v) *Se $\gamma(A) > 1$, então A é um conjunto infinito.*

(vi) Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe uma vizinhança V de A relativamente aberta em $\mathcal{M}$ e σ-invariante tal que $\gamma(A) = \gamma(\overline{V})$.

Demonstração. (i) Suponhamos que $A \subset B$ e admitamos, sem perda de generalidade, que $\gamma(B) = k < \infty$. Pela definição de γ, existe uma aplicação contínua $h : B \to \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ tal que $h(\sigma u) = e^{i\frac{2\pi}{m}} h(u)$, $\forall u \in B$. Considerando a restrição de h a A, obtém-se $\gamma(A) \leqslant k$.

(ii) Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\gamma(A) = k < \infty$ e $\gamma(B) = l < \infty$. Então existem aplicações contínuas $\varphi \in C(A, \mathbb{C}^k \setminus \{0\})$ e $\psi \in C(B, \mathbb{C}^l \setminus \{0\})$, ambas satisfazendo (2.11). Pelo Teorema da extensão de Tietze (cf. Teorema A.12 do Apêndice), existem aplicações contínuas $\hat{\varphi} \in C(\mathcal{M}, \mathbb{C}^k)$ e $\hat{\psi} \in C(\mathcal{M}, \mathbb{C}^l)$ que prolongam φ e ψ, respetivamente. Definimos Φ e Ψ como

$$\Phi(u) := \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e^{-i\frac{2j\pi}{m}} \hat{\varphi}(\sigma^j u), \quad \Psi(u) := \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e^{-i\frac{2j\pi}{m}} \hat{\psi}(\sigma^j u).$$

Então

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma u) &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e^{-i\frac{2j\pi}{m}} \hat{\varphi}(\sigma^{j+1} u) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e^{-i\frac{2j\pi}{m}} e^{i\frac{2\pi}{m}} \hat{\varphi}(\sigma^j u) \\ &= e^{i\frac{2\pi}{m}} \Phi(u) \end{aligned}$$

e analogamente se verifica que $\Psi(\sigma u) = e^{i\frac{2\pi}{m}} \Psi(u)$, ou seja, Φ e Ψ são extensões contínuas de φ e ψ que satisfazem (2.11).

Finalmente, definimos a aplicação $h : \mathcal{M} \to \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^l$ como

$$h(u) = (\Phi(u), \Psi(u)).$$

Como $0 \notin \varphi(A) = \Phi(A)$ e $0 \notin \psi(B) = \Psi(B)$, temos que $0 \notin h(A \cup B)$. Então h induz uma aplicação $A \cup B \to \mathbb{C}^{k+l} \setminus \{0\}$ que satisfaz (2.11). Logo, $\gamma(A \cup B) \leqslant k + l$.

(iii) Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\gamma\big(\overline{g(A)}\big) = k < \infty$. Então, por definição, existe uma aplicação contínua $h : \overline{g(A)} \to \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ que satisfaz (2.11). Observamos que a aplicação composta

$$h \circ g : A \to \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$$

também satisfaz (2.11), visto que $h(g(\sigma u)) = h(\sigma g(u)) = e^{i\frac{2\pi}{m}} h(g(u))$. Logo, $\gamma(A) \leqslant k$.

(iv) Suponhamos, com vista a um absurdo, que temos $\gamma(\psi(S)) \leqslant k-1$. Então existe uma aplicação contínua $h : \psi(S) \to \mathbb{C}^{k-1} \setminus \{0\}$ que satisfaz (2.11). Logo, a aplicação $h \circ \psi : S \to \mathbb{C}^{k-1} \setminus \{0\}$ é contínua e verifica

$$(h \circ \psi)(e^{i\frac{2\pi}{m}} y) = h(\sigma\psi(y)) = e^{i\frac{2\pi}{m}} (h \circ \psi)(y), \quad \forall y \in S.$$

Utilizando o Teorema $\mathbb{Z}^p$ Borsuk-Ulam (ver, por exemplo, [19, Teorema 1] ou [25, Teorema 2]), como a imagem de $h \circ \psi$ se encontra num subespaço de $\mathbb{C}^k$ de dimensão inferior, então $h \circ \psi$ tem de se anular em algum ponto. Isto significa que $0 \in (h \circ \psi)(S)$, o que é absurdo. Logo $\gamma(\psi(S)) \geqslant k$.

(v) Se $A \neq \emptyset$ for um subconjunto de $\mathcal{M}$ finito, σ-invariante e sem pontos fixos de σ^{q_b} para $b = 0, 1, \ldots, a$, então A pode escrever-se como

$$A = \{u^1, \ldots, u^r, \sigma(u^1), \ldots, \sigma(u^r), \ldots\ldots, \sigma^{m-1}(u^1), \ldots, \sigma^{m-1}(u^r)\}$$

para algum $r \in \mathbb{N}$, onde $u^k \in \mathcal{M}$, $\forall\, k = 1, \ldots, r$. Definindo a aplicação $h : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ como

$$h(\sigma^j u^k) = e^{i\frac{2(j+1)\pi}{m}}, \quad j = 0, \ldots, m-1, \quad k = 1, \ldots, r,$$

facilmente se verifica que h é contínua e satisfaz (2.11). Logo, por definição, $\gamma(A) = 1$.

(vi) Suponhamos que A é compacto. Como $0 \notin A$ (porque A não contém pontos fixos de $\sigma^{q_b}\ \forall b$), existe $\rho > 0$ tal que $A \cap B_\rho(0) = \emptyset$. Como A é compacto, a sua cobertura

$$\Big\{\widetilde{B}_\rho(u) := \bigcup_{j=0}^{m-1} B_\rho(\sigma^j u)\Big\}_{u \in A}$$

admite uma subcobertura finita $\{\widetilde{B}_\rho(u^1), \ldots, \widetilde{B}_\rho(u^r)\}$. Escolhendo $\rho > 0$ suficientemente pequeno, podemos supor que, para $k = 1, \ldots, r$,

$$B_\rho(\sigma^i u^k) \cap B_\rho(\sigma^j u^k) = \emptyset \quad \text{ se } 0 \leqslant i \neq j \leqslant m-1.$$

Seja $\{\varphi_k\}_{k=1,\ldots,r}$ uma partição da unidade em A relativa a $\{\widetilde{B}_\rho(u^k)\}_k$, i.e., $\varphi_k \in C(A)$ com supp $\varphi_k \subset \widetilde{B}_\rho(u^k)$ e $0 \leqslant \varphi_k \leqslant 1$, $\sum_{k=1}^r \varphi_k(u) = 1$ para qualquer $u \in A$. Definindo Φ_k como

$$\Phi_k(u) := \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \varphi_k(\sigma^j u), \quad k = 1, \ldots, r,$$

concluímos que Φ_k é σ-invariante. Então, para cada k, definindo $h_k : A \to \mathbb{C}$ como

$$h_k(u) = \begin{cases} e^{i\frac{2j\pi}{m}} \Phi_k(u) & \text{se } u \in B_\rho(\sigma^j u^k), \quad j = 0, \ldots, m-1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

facilmente se verifica que $h := (h_1, \ldots, h_r) : A \to \mathbb{C}^r \setminus \{0\}$ é uma aplicação contínua. Além disso, se $u \in B_\rho(\sigma^j u^k)$ para um certo $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, então $\sigma u \in B_\rho(\sigma^{j+1} u^k)$, pelo que

$$\begin{aligned} h_k(\sigma u) &= e^{i\frac{2(j+1)\pi}{m}} \Phi_k(\sigma u) \\ &= e^{i\frac{2\pi}{m}} e^{i\frac{2j\pi}{m}} \Phi_k(u) = e^{i\frac{2\pi}{m}} h_k(u). \end{aligned}$$

Consequentemente, h satisfaz (2.11) e, por definição, $\gamma(A) \leqslant r < \infty$.

Suponhamos agora que A é compacto e $\gamma(A) = k < \infty$. Seja $h \in C(A, \mathbb{C}^k \setminus \{0\})$ uma aplicação contínua que satisfaz (2.11). Pelo Teorema da extensão de Tietze (cf. Teorema A.12 do Apêndice), podemos prolongar h a $\mathcal{M}$ de forma contínua. Como A é compacto e h é contínua, $h(A)$ também é compacto. Então existe uma vizinhança aberta V de $h(A)$ contida num compacto em $\mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ que verifica

$$e^{i\frac{2\pi}{m}} I_{k\times k} V = V, \tag{2.12}$$

onde $I_{k\times k}$ é a matriz identidade de dimensão k. Defina-se $V_A := h^{-1}(V)$. Então V_A é uma vizinhança de A relativamente aberta em $\mathcal{M}$ e, por (2.12), V_A é σ-invariante. Por construção, $0 \notin h(\overline{V_A})$ e $\gamma(\overline{V_A}) \leqslant k$. Por outro lado, $A \subset \overline{V_A}$, pelo que, por *(i)*, $\gamma(A) \leqslant \gamma(\overline{V_A})$. Logo $\gamma(A) = \gamma(\overline{V_A})$.

$\square$

2.4 Demonstração do Teorema 2.1

Para usar o índice Z_m definido na secção anterior, precisamos de construir uma aplicação contínua ψ, de domínio $\mathbb{S}^{2k-1}$, a esfera unitária de $\mathbb{C}^k$, e com imagem em $\mathcal{M}$, satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\psi(e^{i\frac{2\pi}{m}} y) = \sigma\psi(y), \quad \forall y \in \mathbb{S}^{2k-1}.$$

Teorema 2.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio regular limitado para $N \geqslant 1$ ou radialmente simétrico (possivelmente ilimitado) para $N \geqslant 2$ e seja $m \geqslant 2$. Então, para todo o $k \in \mathbb{N}$, existe uma aplicação contínua $\psi : \mathbb{S}^{2k-1} \to \mathcal{M}$ tal que*

$$\psi(e^{i\frac{2\pi}{m}} y) = \sigma\psi(y), \quad \forall y \in \mathbb{S}^{2k-1}.$$

Vejamos primeiro um resultado que simplificará a demonstração do Teorema 2.14. Daqui em diante, faremos constantemente a identificação

$$\mathbb{S}^1 = [0, 2\pi[\quad (\text{mod } 2\pi).$$

Lema 2.15. *Seja Ω um intervalo ou um domínio radial em $\mathbb{R}^N$ e seja $m \geqslant 2$. Então existe uma função $u \in C^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ tal que:*

i) supp $u(\cdot,\cdot) \subset \mathbb{S}^1 \times \Omega$;

ii) $u(t + \frac{2j\pi}{m}, |x|) \cdot u(t + \frac{2l\pi}{m}, |x|) = 0, \quad \forall\, 1 \leqslant j \neq l \leqslant m,\ x \in \Omega,\ t \in [0, 2\pi[$;

iii) $|u(t,\cdot)|_{L^{2p}} \neq 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi[$.

Demonstração. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ for um domínio radial, pondo $r = |x|$ para $x \in \Omega$, podemos representar Ω como um intervalo $]r_1, r_2[$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$\Omega =]0, 4m[$. Consideremos os seguintes $2m$ subintervalos de Ω:

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 =]0,1[, \quad \Omega_2 =]2,3[, \quad \Omega_3 =]4,5[,\\
&\vdots\\
&\Omega_k =]2(k-1), 2k-1[,\\
&\vdots\\
&\Omega_{2m} =]4m-2, 4m-1[.
\end{aligned}$$

Definam-se $2m$ faixas $F_k \subset \mathbb{S}^1 \times \Omega$ como

$$F_k = \{(t,r) : t \in I_k, r \in \Omega_k\}, \quad k = 1, \ldots, 2m,$$

onde

$$I_k = \left[\frac{(k-1)\pi}{m}, \frac{(k+1)\pi}{m} \right[.$$

Consideremos agora a aplicação $u_1 : F_1 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_1(t,r) = \exp\left\{ -\frac{1}{1 - \left(\frac{m}{\pi}t - 1\right)^2} - \frac{1}{1 - (2r-1)^2} \right\}.$$

Observamos que u_1 pode ser prolongada por zero a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma C^1. Finalmente, definimos a aplicação $u : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned}
&u_{|F_k}(t,r) = u_1\left(t - \frac{\pi}{m}(k-1), r - 2(k-1)\right),\\
&u_{|(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R})\setminus\bigcup_{k=1}^{2m} F_k}(t,r) = 0.
\end{aligned}$$

Por construção, esta aplicação verifica todas as propriedades pretendidas.

$\square$

Demonstração do Teorema 2.14. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que Ω é um intervalo ou um domínio radial contido em $\mathbb{R}^N$, para $N \geqslant 2$. De facto, se não fosse o caso, poderíamos tomar um intervalo contido em Ω se $N = 1$ ou uma bola totalmente contida em Ω se fosse $N \geqslant 2$. Para $x \in \Omega$, seja $r = |x|$ e fixemos $k \geqslant 1$.

Dividimos Ω em m subconjuntos Ω_i, abertos e radialmente simétricos, tais que

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_i \quad \text{e} \quad \Omega_i \cap \Omega_l = \emptyset \text{ se } i \neq l.$$

A seguir dividimos cada Ω_i em k partes, obtendo $m \times k$ subconjuntos Ω_i^j abertos e radialmente simétricos, com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, k$.

Para cada Ω_i^j, consideremos uma aplicação $u_i^j \in C^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ nas condições do Lema 2.15. Sendo

$$u^j(t,r) = \sum_{i=1}^{m} u_i^j(t,r) \quad \text{para } j = 1, \ldots, k,$$

temos que supp $u^j(\cdot,\cdot) \cap \text{supp } u^l(\cdot,\cdot) = \emptyset$ se $j \neq l$.

Definimos $\mathcal{C}^k$ como o espaço gerado pelos u^j, isto é,

$$\mathcal{C}^k = \Big\{ \sum_{j=1}^{k} d_j e^{i\theta_j} u^j \;\Big|\; d_j \in \mathbb{R}^+, \theta_j \in [0, 2\pi[\\ \text{e } \theta_j = 0 \text{ se } d_j = 0, \quad j = 1, \dots, k \Big\}.$$

Então $\mathcal{C}^k$ identifica-se com o espaço complexo $\mathbb{C}^k$ e a sua esfera unitária pode escrever-se como

$$\mathbb{S}^{2k-1} = \Big\{ \sum_{j=1}^{k} d_j e^{i\theta_j} u^j \in \mathcal{C}^k \;\Big|\; \sum_{j=1}^{k} d_j^2 = 1 \Big\}.$$

Para qualquer vetor $y = \sum_{j=1}^{k} d_j e^{i\theta_j} u^j$ em $\mathbb{S}^{2k-1}$, definimos $v(y) : \mathbb{S}^1 \times \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$v(y)(t,r) = \left(\frac{\mu^{-\frac{1}{2p-2}} \left\| \sum_{j=1}^{k} d_j\, u^j(t+\theta_j, r) \right\|^{\frac{1}{p-1}}}{\left| \sum_{j=1}^{k} d_j\, u^j(t+\theta_j, r) \right|_{2p}^{\frac{p}{p-1}}} \right) \left| \sum_{j=1}^{k} d_j\, u^j(t+\theta_j, r) \right|.$$

Definimos agora a função $\psi : \mathbb{S}^{2k-1} \to \mathcal{M}$ como

$$\psi(y) = \psi\left(\sum_{j=1}^{k} d_j e^{i\theta_j} u^j \right) = \big(v(y)(t_1^*, \cdot), \dots, v(y)(t_m^*, \cdot) \big),$$

onde $t_i^* = \frac{2(i-1)\pi}{m}$ para $i = 1, \dots, m$.

Facilmente se verifica que ψ está bem definida e é contínua. Da propriedade *ii)* do Lema 2.15 e da definição de $v(y)$ resulta que

$$v(y)(t_i^*, \cdot) v(y)(t_l^*, \cdot) = 0 \quad \text{para } i \neq l,$$

o que garante que $\psi(y) \in \mathcal{M}$ independemente de β.

Além disso, ψ satisfaz

$$\begin{aligned}
\psi(e^{i\frac{2\pi}{m}} y) &= \psi\left(e^{i\frac{2\pi}{m}} \sum_{j=1}^{k} d_j e^{i\theta_j} u^j \right) = \psi\left(\sum_{j=1}^{k} d_j e^{i(\theta_j + \frac{2\pi}{m})} u^j \right) \\
&= \left(v(y)\Big(t_1^* + \frac{2\pi}{m}, \cdot\Big), \dots, v(y)\Big(t_m^* + \frac{2\pi}{m}, \cdot\Big) \right) \\
&= \big(v(y)(t_2^*, \cdot), \dots, v(y)(t_m^*, \cdot), v(y)(t_1^*, \cdot) \big) \\
&= \sigma\psi\left(\sum_{j=1}^{k} d_j e^{i\theta_j} u^j \right) = \sigma\psi(y).
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado, que tem como ingrediente principal o Lema da deformação 2.10, caracteriza o comportamento do índice γ perto dos níveis críticos.

Lema 2.16. *Para qualquer* $c < \min_{0\leqslant b\leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\}$*, temos* $\gamma(K_c) < \infty$ *e existe* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\gamma(\mathcal{M}^{c+\varepsilon}) \leqslant \gamma(\mathcal{M}^{c-\varepsilon}) + \gamma(K_c).$$

Demonstração. Como, pela alínea *(iv)* do Lema 2.5, $E_{\mathcal{M}}$ satisfaz a condição de Palais-Smale, o conjunto K_c é compacto. Além disso, da definição de $c^{q_b}(\beta)$ e da hipótese $c < \min_{0\leqslant b\leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\}$ resulta que K_c não possui pontos fixos de σ^{q_b} para qualquer $b = 0, 1, \ldots, a$. Logo, pelo Lema 2.13*(vi)*, concluímos que $\gamma(K_c) < \infty$ e que existe uma vizinhança V de K_c relativamente aberta em $\mathcal{M}$ e σ-invariante tal que $\gamma(K_c) = \gamma(\overline{V})$.

Seja $\varepsilon > 0$ e $\eta : [0,1]\times\mathcal{M}^{c+\varepsilon}\setminus V \to \mathcal{M}^{c+\varepsilon}$ a deformação de classe C^1 dada pelo Lema 2.10. Então $\eta_1 := \eta(1,\cdot)$ é uma aplicação contínua e σ-invariante de $\mathcal{M}^{c+\varepsilon}\setminus V$ para $\mathcal{M}^{c-\varepsilon}$. Logo, usando o Lema 2.13*(iii)*, temos $\gamma(\mathcal{M}^{c+\varepsilon}\setminus V) \leqslant \gamma(\mathcal{M}^{c-\varepsilon})$. Pelas alíneas *(i)* e *(ii)* do Lema 2.13, concluímos então que

$$\gamma(\mathcal{M}^{c+\varepsilon}) \leqslant \gamma(\mathcal{M}^{c+\varepsilon}\setminus V) + \gamma(\overline{V}) \leqslant \gamma(\mathcal{M}^{c-\varepsilon}) + \gamma(K_c).$$

□

Em seguida, definimos a sucessão crescente de níveis do tipo Lusternik-Schnirelmann em $\mathcal{M}$ associada ao índice de Z_m como

$$c_k := \inf\{c\in\mathbb{R} \mid \gamma(\mathcal{M}^c) \geqslant k\}, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Lema 2.17.

(i) Para qualquer k, $c_k < \infty$ *é limitado independentemente de* $\beta < 0$.

(ii) $c_k \to \bar{c}$ *quando* $k\to\infty$*, onde* $\min_{0\leqslant b\leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\} \leqslant \bar{c} \leqslant \infty$.

(iii) Se $c := c_k = c_{k+1} = \cdots = c_l < \min_{0\leqslant b\leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\}$ *para algum* $l \geqslant k$*, então* $\gamma(K_c) \geqslant l - k + 1$.

(iv) Se $c_k < \min_{0\leqslant b\leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\}$*, então* $K_{c_k} \neq \emptyset$ *e* $\mathcal{M}^{c_k}$ *contém, pelo menos,* k Z_m*-órbitas de pontos críticos de* E.

Demonstração. (i) Seja $\psi : \mathbb{S}^{2k-1} \to \mathcal{M}$ a aplicação contínua que verifica

$$\psi(e^{i\frac{2\pi}{m}}y) = \sigma\psi(y), \quad \forall y\in\mathbb{S}^{2k-1}$$

construída na demonstração do Teorema 2.14. Logo, pelo Lema 2.13*(iv)*, $\gamma(\psi(\mathbb{S}^{2k-1})) \geqslant k$. Como $\psi(\mathbb{S}^{2k-1}) \subset \mathcal{M}$, (2.13) implica que

$$c_k \leqslant \sup_{y\in\mathbb{S}^{2k-1}} E(\psi(y)) < \infty.$$

Tendo em conta a construção de $\mathbb{S}^{2k-1}$ feita na definição de ψ, o valor de $\sup_{y\in\mathbb{S}^{2k-1}} E(\psi(y))$ não depende de β, pelo que concluímos o que queríamos.

(ii) Sendo $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão crescente, se a conclusão não fosse verdadeira teríamos $c_k \to \bar{c}$ quando $k \to \infty$ e $\bar{c} < \min_{0\leqslant b\leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\}$. Logo, pelo Lema 2.16, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\gamma(\mathcal{M}^{\bar{c}+\varepsilon}) \leqslant \gamma(\mathcal{M}^{\bar{c}-\varepsilon}) + \gamma(K_{\bar{c}}). \tag{2.14}$$

Para k suficientemente grande, obtemos $\bar{c} - \varepsilon < c_k$, donde $\gamma(\mathcal{M}^{\bar{c}-\varepsilon}) < k < \infty$. Como, pelo Lema 2.16, $\gamma(K_{\bar{c}})$ também é finito, (2.14) implica que $\gamma(\mathcal{M}^{\bar{c}+\varepsilon}) < \infty$. Mas então, para $k' > \gamma(\mathcal{M}^{\bar{c}+\varepsilon})$, teríamos $c_{k'} \geqslant \bar{c} + \varepsilon$, o que contradiz o facto de $c_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{c}$ de forma crescente.

(iii) Por hipótese e pela definição (2.13), temos que

$$\gamma(\mathcal{M}^{c-\varepsilon}) = \gamma(\mathcal{M}^{c_k-\varepsilon}) \leqslant k-1 \quad \text{e} \quad \gamma(\mathcal{M}^{c+\varepsilon}) = \gamma(\mathcal{M}^{c_l+\varepsilon}) \geqslant l$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Logo, usando a estimação do Lema 2.14, obtemos

$$l \leqslant \gamma(\mathcal{M}^{c+\varepsilon}) \leqslant \gamma(\mathcal{M}^{c-\varepsilon}) + \gamma(K_c) \leqslant k - 1 + \gamma(K_c),$$

ou seja, $\gamma(K_c) \geqslant l - k + 1$.

(iv) Se $c_k < \min_{0\leqslant b\leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\}$, a alínea anterior (com $l = k$) garante que $\gamma(K_{c_k}) \geqslant 1$, pelo que $K_{c_k} \neq \emptyset$. Se $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$, então

$$\mathcal{M}^{c_1} \subset \mathcal{M}^{c_2} \subset \cdots \subset \mathcal{M}^{c_k},$$

pelo que $\mathcal{M}^{c_k}$ contém pelo menos k Z_m-órbitas de pontos críticos de E. Por outro lado, se $c_i = c_j$ para alguns $i < k$ e $j > i$, então a alínea anterior implica que $\gamma(K_{c_i}) > 1$. Logo, pelo Lema 2.13*(v)*, K_{c_i} é infinito e, neste caso, $\mathcal{M}^{c_k}$ contém uma infinidade de Z_m-órbitas de pontos críticos de E.

$\square$

Podemos finalmente completar a demonstração do Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1.
(a) Recordemos que, dado um inteiro $m \geqslant 2$, denotamos os divisores próprios de m por

$$1 = q_0 < q_1 < \cdots < q_a < m, \text{ para um inteiro } a \geqslant 0$$

e definimos $m_b := m/q_b$ para $b = 0, 1, \ldots, a$.

Suponhamos que $\beta \leqslant -\frac{\mu}{m-1}$. Então, pelo Lema 2.8, $c^{q_0}(\beta) = c^1(\beta) = \infty$.

Se m for primo, $\min_{0\leqslant b\leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\} = c^1(\beta) = \infty$. Então, pelas alíneas *(i)* e *(ii)* do Lema 2.17, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente tal que $c_k < \infty$ $\forall k$ e $c_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Assim, basta escolher $u^k \in K_{c_k}$ para cada k para obtermos uma sucessão de Z_m-órbitas de pontos críticos de E. Pelo Lema 2.3, o sistema (2.1) tem uma sucessão de Z_m-órbitas de soluções.

Vejamos agora o caso em que m não é primo. Se $\beta \leqslant -\frac{\mu}{m_a-1}$, então temos também

$$\beta \leqslant -\frac{\mu}{m_a-1} \leqslant -\frac{\mu}{m_b-1} \quad \forall b = 0, 1, \ldots, a.$$

Logo, pelo Lema 2.8, concluímos que

$$c^{q_0}(\beta) = c^{q_1}(\beta) = \cdots = c^{q_a}(\beta) = \infty, \text{ ou seja, } \min_{0 \leqslant b \leqslant a} \{c^{q_b}(\beta)\} = \infty.$$

Recorrendo ao Lema 2.17 e repetindo a estratégia usada no caso em que m é primo, obtemos uma sucessão de soluções de (2.1) para $\beta \leqslant -\frac{\mu}{m_a-1}$.

Resta verificar o caso em que $\beta \in \left]-\frac{\mu}{m_a-1}, -\frac{\mu}{m-1}\right]$. Para tal, Fixemos $b \in \{1, \ldots, a\}$, donde obtemos que $m = q_b m_b$. Considerando apenas soluções da forma

$$(u_1, \ldots, u_{q_b}, u_1, \ldots, u_{q_b}, \ldots\ldots, u_1, \ldots, u_{q_b}), \tag{2.15}$$

que são pontos fixos de σ^{q_b}, podemos reduzir (2.1) a um sistema com q_b equações

$$\begin{cases} -\Delta u_i + u_i = \big(\mu + \beta(m_b - 1)\big)|u_i|^{2p-2}u_i + \beta m_b |u_i|^{p-2}u_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |u_j|^p \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u_i > 0 \text{ em } \Omega, \quad u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad i = 1, ..., q_b. \end{cases} \tag{2.16}$$

O sistema (2.16) corresponde ao sistema original (2.1) com as alterações

$$\begin{aligned} m &\longmapsto q_b \\ \mu &\longmapsto \mu + \beta(m_b - 1) \\ \beta &\longmapsto \beta m_b, \end{aligned}$$

desde que o novo μ seja estritamente positivo, isto é, desde que

$$\beta > -\frac{\mu}{m_b - 1}.$$

Assim, se encontrarmos uma sucessão de Z_{q_b}-órbitas de soluções de (2.16) para algum intervalo de valores de β, obtemos também uma sucessão de Z_m-órbitas de soluções de (2.1) da forma (2.15).

Consideremos agora os divisores próprios de q_b

$$1 = \tilde{q}_0 < \tilde{q}_1 < \cdots < \tilde{q}_f < q_b$$

e denotemos o maior de todos por $q_{b^*} := \tilde{q}_f$. Aplicando o Lema 2.8 a (2.16), concluímos que, se

$$\beta \leqslant \min\left\{-\frac{\mu}{\frac{m}{\tilde{q}_0} - 1}, \ldots, -\frac{\mu}{\frac{m}{\tilde{q}_f} - 1}\right\} = -\frac{\mu}{\frac{m}{\tilde{q}_f} - 1},$$

então $c^{\tilde{q}_0}(\beta) = \cdots = c^{\tilde{q}_f}(\beta) = \infty$. Recorrendo novamente ao Lema 2.17 como no caso m primo, desta vez aplicado ao sistema (2.16), concluímos que existe uma sucessão de Z_{q_b}-órbitas de soluções de (2.16) para $\beta \in \left]-\frac{\mu}{m_b-1}, -\frac{\mu}{m_{b^*}-1}\right]$.

Por fim, fazendo percorrer b entre 1 e a, obtemos multiplicidade de soluções em

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &:= \bigcup_{b=1}^{a} \left]-\frac{\mu}{m_b-1}, -\frac{\mu}{m_{b^*}-1}\right] \\ &= \left]-\frac{\mu}{m_a-1}, -\frac{\mu}{m_{a^*}-1}\right] \bigcup \cdots \bigcup \left]-\frac{\mu}{m_1-1}, -\frac{\mu}{m-1}\right].\end{aligned}$$

É fácil verificar que $\mathcal{U} = \left]-\frac{\mu}{m_a-1}, -\frac{\mu}{m-1}\right]$. De facto, como $q_{b^*} < q_b$, temos que $q_{b^*} \leqslant q_{(b-1)}$ e consequentemente

$$-\frac{\mu}{m_{b^*}-1} \geqslant -\frac{\mu}{m_{(b-1)}-1}.$$

Além disso, como $q_{(b-1)} < q_b$, temos que $q_{(b-1)^*} < q_{b^*}$, pelo que

$$-\frac{\mu}{m_{b^*}-1} < -\frac{\mu}{m_{(b-1)^*}-1}.$$

Concluímos então que existe uma sucessão de Z_{q_b}-órbitas de soluções de (2.16) em $\left]-\frac{\mu}{m_a-1}, -\frac{\mu}{m-1}\right]$. Como foi observado anteriormente, a esta sucessão corresponde uma sucessão de Z_m-órbitas de soluções de (2.1).

(b) Fixemos um $k \in \mathbb{N}$. Pelos Lemas 2.8 e 2.17*(i)*, existe um $\beta_k > -\frac{\mu}{m-1}$ tal que, para $\beta < \beta_k$, temos $c_k < \min_{0 \leqslant b \leqslant a}\{c^{q_b}(\beta)\}$. Logo, pelo Lema 2.17*(iv)*, $\mathcal{M}^{c_k}$ tem pelo menos k Z_m-órbitas de pontos críticos de E para $\beta \in \left]-\frac{\mu}{m-1}, \beta_k\right[$. Consequentemente, (2.1) tem pelo menos k Z_m-órbitas de soluções.

$\square$

Capítulo 3

Limitações *a priori* para soluções positivas de um sistema elíptico com duas equações

3.1 Apresentação do problema

O objetivo deste capítulo é estabelecer limitações *a priori* para soluções do sistema elíptico não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_1 u^{2p-1} + \beta u^{p-1} v^p + h_1(x,u,v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \mu_2 v^{2p-1} + \beta v^{p-1} u^p + h_2(x,u,v) & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \quad u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\beta > -\sqrt{\mu_1 \mu_2}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular limitado e

$$\begin{aligned} &1 < p < \infty, && \text{se } N = 1, 2, \\ &1 < p \leqslant \frac{N}{N-1}, && \text{se } N \geqslant 3 \text{ ou} \\ &p = 2, && \text{se } N = 3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Além disso, admitimos a seguinte hipótese relativamente às aplicações h_1, h_2:

$$\frac{h_i(x,u,v)}{(\max\{u,v\})^{2p-1}} \xrightarrow[\max\{u,v\}\to\infty]{} 0 \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega. \tag{3.3}$$

Como exemplo relevante, temos o caso em que h_1 e h_2 são somas de potências de u, v ou $u\,v$ com grau de homogeneidade menor que $2p-1$.

Nestas condições, iremos demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer solução (u,v) de (3.1), nas condições anteriores, se tem*

$$|u|_\infty, |v|_\infty \leqslant C.$$

Em particular, se tivermos $\mu := \mu_1 = \mu_2$, $h_1(x,u,v) = -u$ e $h_2(x,u,v) = -v$, o Teorema 3.1 garante a existência de limitações *a priori* para os sistemas com duas equações estudados no capítulo anterior quando $\beta > -\mu$, em contraste com a sucessão ilimitada de soluções positivas que se obtém para $\beta \leqslant -\mu$.

Seguindo as estratégias de [5] para o caso em que $p = 2$ e $N \leqslant 3$, vamos demonstrar o Teorema 3.1 conjugando a técnica de *blow up* (cf. secção 1.2) com resultados do tipo Liouville. Para alguns valores de p, os teoremas de Liouville necessários resultam de conhecidos resultados de não existência de soluções da inequação $-\Delta w \geqslant w^{2p-1}$ em $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^N_+$. Para outros valores de p não incluídos, é ainda possível obter resultados, recorrendo a outras ferramentas. Seguindo [6], vamos usar o Lema de duplicação de Poláčik, Quittner e Souplet [20] e desigualdades do tipo de Harnack para estabelecer limitações universais e desigualdades envolvendo o gradiente de soluções de (3.6). Em seguida, combinamos estas estimativas com uma identidade de integrais sobre uma família de cilindros, de modo obter uma inequação diferencial que só é satisfeita pela solução trivial.

3.2 Teoremas de Liouville

Nesta secção vamos demonstrar os seguintes teoremas de tipo Liouville.

Teorema 3.2. *Suponhamos que* $\beta > -\sqrt{\mu_1\mu_2}$ *e que* $1 < p < \infty$ *se* $N = 1, 2$ *e* $1 < p \leqslant \frac{N-1}{N-2}$ *se* $N \geqslant 3$. *Seja* (u, v) *uma solução clássica de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_1 u^{2p-1} + \beta u^{p-1} v^p & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v = \mu_2 v^{2p-1} + \beta v^{p-1} u^p & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u, v \geqslant 0 \ \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.4}$$

Então $(u, v) \equiv (0, 0)$.

Recordemos a notação $R^N_+ := \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$.

Teorema 3.3. *Suponhamos que* $\beta > -\sqrt{\mu_1\mu_2}$ *e que se tem*

$$\begin{array}{ll} 1 < p < \infty, & \text{se } N = 1, 2, \\ 1 < p \leqslant \dfrac{3}{2} \ \text{ou } p \geqslant 2, & \text{se } N = 3, \\ 1 < p \leqslant \dfrac{4}{3} \ \text{ou } 2 \leqslant p < 3, & \text{se } N = 4, \\ 1 < p \leqslant \dfrac{N}{N-1}, & \text{se } N \geqslant 5. \end{array} \tag{3.5}$$

Além disso, admita-se ainda que, para estes casos,

$$\text{o problema (3.4) só admite a solução trivial.} \tag{H}$$

Então, se (u,v) é uma solução clássica de

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_1 u^{2p-1} + \beta u^{p-1} v^p & \text{em } \mathbb{R}^N_+, \\ -\Delta v = \mu_2 v^{2p-1} + \beta v^{p-1} u^p & \text{em } \mathbb{R}^N_+, \\ u, v \geqslant 0 \text{ em } \mathbb{R}^N_+ \quad u \equiv v \equiv 0 \text{ sobre } \partial\mathbb{R}^N_+, \end{cases} \tag{3.6}$$

tem-se $(u,v) \equiv (0,0)$.

Observação 3.4. Em virtude do Teorema 3.2, é evidente que, à exceção dos casos em que $N = 3$ e $p > 2$ e em que $N = 4$ e $2 \leqslant p < 3$, a hipótese (H) é sempre verificada. Tendo em vista englobar os casos referidos, para os quais as restantes técnicas que utilizaremos ainda são válidas, continuaremos a utilizar a hipótese (H) no decorrer do capítulo.

O próximo teorema, que apresentaremos sem demonstração, é um conhecido resultado de não existência de sobresoluções, demonstrado por Gidas [10] (alínea *(a)*) e por Laptev [15, 16](alínea *(b)*, tendo o caso $q > 1$ sido inicialmente provado por Berestycki, Capuzzo-Dolcetta e Nirenberg [3]). Como veremos à frente, a demonstração do Teorema 3.2 é uma consequência quase direta da alínea (a) deste resultado, enquanto que a alínea (b) permite demonstrar o Teorema 3.3 para certos valores de p (cf. Observação 3.6 à frente).

Teorema 3.5. *(a) Suponhamos que $0 < q \leqslant \frac{N}{N-2}$ se $N \geqslant 3$, $0 < q < \infty$ se $N = 1, 2$ e que $w \in C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma função não negativa que satisfaz $-\Delta w \geqslant w^q$ em $\mathbb{R}^N$. Então $w \equiv 0$.*

(b) Suponhamos que $0 < q \leqslant \frac{N+1}{N-1}$ se $N \geqslant 2$, $0 < q < \infty$ se $N = 1$ e que $w \in C^2\big(\overline{\mathbb{R}^N_+}\big)$ é uma função não negativa que satisfaz $-\Delta w \geqslant w^q$ em $\mathbb{R}^N_+$ e $w \equiv 0$ em $\partial\mathbb{R}^N_+$. Então $w \equiv 0$.

O Teorema 3.2 é uma generalização do Teorema 2.1 de [5], onde os autores consideram $p = 2$ e $N = 3$. A demonstração que apresentamos segue as ideias de [5].

Demonstração do Teorema 3.2. Se $\beta \geqslant 0$, então $-\Delta u \geqslant \mu_1 u^{2p-1}$ e $-\Delta v \geqslant \mu_2 v^{2p-1}$ em $\mathbb{R}^N$. Pondo $\tilde{u} = \mu_1^{1/(2p-2)} u$, resulta que $\tilde{u}$ satisfaz $-\Delta \tilde{u} \geqslant \tilde{u}^{2p-1}$ em $\mathbb{R}^N$. Analogamente, temos que $\tilde{v} = \mu_2^{1/(2p-2)} v$ satisfaz $-\Delta \tilde{v} \geqslant \tilde{v}^{2p-1}$ em $\mathbb{R}^N$. Logo, pelo Teorema 3.5*(a)*, aplicado com $q = 2p - 1$, obtemos $u \equiv \tilde{u} \equiv 0$ e $v \equiv \tilde{v} \equiv 0$.

Suponhamos agora que $-\sqrt{\mu_1\mu_2} < \beta < 0$ e defina-se

$$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{2p}}. \tag{3.7}$$

Vamos primeiro mostrar que existe $\gamma_0 > 0$ tal que, para quaisquer $u, v \geqslant 0$,

$$\alpha(\mu_1 u^{2p-1} + \beta u^{p-1} v^p) + \mu_2 v^{2p-1} + \beta v^{p-1} u^p \geqslant \gamma_0 (\alpha u + v)^{2p-1}. \tag{3.8}$$

Para $u = 0$, vem $\mu_2 v^{2p-1} \geqslant \gamma_0 v^{2p-1}$, pelo que basta escolher $\gamma_0 \leqslant \mu_2$. No caso, $u \neq 0$, pomos $t = \frac{v}{u}$ e definimos a aplicação

$$t \mapsto \rho(t) := \frac{\alpha(\mu_1 + \beta t^p) + t^{p-1}(\mu_2 t^p + \beta)}{(\alpha + t)^{2p-1}}, \quad t \geqslant 0.$$

Para mostrar (3.8), é suficiente verificar que a aplicação ρ não se anula para qualquer $t \geqslant 0$. Como $\beta > -\sqrt{\mu_1 \mu_2}$, observamos que

$$\begin{aligned}
(\alpha + t)^{2p-1}\rho(t) &= \alpha(\mu_1 + \beta t^p) + t^{p-1}(\mu_2 t^p + \beta) \\
&> \alpha\mu_1 - \alpha\sqrt{\mu_1\mu_2}\, t^p + \mu_2 t^{2p-1} - \sqrt{\mu_1\mu_2}\, t^{p-1} \\
&= \mu_2 \left(t^{2p-1} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{p-1}{2p}} t^p - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}} t^{p-1} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{2p-1}{2p}} \right) \\
&=: \mu_2\, \varphi(t).
\end{aligned}$$

Então, abreviando $\mu := \mu_1/\mu_2$, basta mostrar que, para qualquer $t \geqslant 0$,

$$\varphi(t) = t^{2p-1} - \mu^{\frac{p-1}{2p}} t^p - \mu^{\frac{1}{2}} t^{p-1} + \mu^{\frac{2p-1}{2p}} \geqslant \varphi\left(\mu^{\frac{1}{2p}}\right) = 0.$$

Estudemos a primeira derivada da função φ:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= (2p-1)t^{2p-2} - p\,\mu^{\frac{p-1}{2p}} t^{p-1} - (p-1)\mu^{\frac{1}{2}} t^{p-2} \\
&= t^{p-2}\left((2p-1)t^p - p\,\mu^{\frac{p-1}{2p}}\, t - (p-1)\mu^{\frac{1}{2}}\right) \\
&=: t^{p-2}\,\gamma(t).
\end{aligned}$$

Observamos que a função γ é simples de estudar. De facto, temos que

$$\gamma'(t) = p(2p-1)t^{p-1} - p\,\mu^{\frac{p-1}{2p}} \quad \text{e}$$

$$\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow t = (2p-1)^{-\frac{1}{p-1}} \mu^{\frac{1}{2p}} =: t^*.$$

Além disso,

		$t^* > 0$	
γ'	$-$	0	$+$
γ	$\searrow$	min (< 0)	$\nearrow$

Ora $\gamma(0) = -(p-1)\sqrt{\mu} < 0$, pelo que γ tem no máximo um zero em $]0, +\infty[$. Como $\gamma\left(\mu^{\frac{1}{2p}}\right) = 0$, obtemos

	0		$\mu^{\frac{1}{2p}}$	
γ	$-$	$-$	0	$+$
φ	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

donde concluímos que $\min_{t\geqslant 0}\varphi(t)=\varphi\left(\mu^{\frac{1}{2p}}\right)=0$.

Pondo agora $z=\alpha u+v$, a desigualdade (3.8) implica que

$$-\Delta z=-\alpha\Delta u-\Delta v\geqslant \gamma_0 z^{2p-1}\quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Logo, $\tilde{z}:=\gamma_0^{\frac{1}{2p-2}}z$ satisfaz $-\Delta\tilde{z}\geqslant \tilde{z}^{2p-1}$ em $\mathbb{R}^N$. Como $\tilde{z}\geqslant 0$, concluímos, novamente pelo Teorema 3.5*(a)*, que $\tilde{z}\equiv 0$. Logo $z\equiv 0$, donde $u\equiv v\equiv 0$.

□

Observação 3.6. Utilizando um argumento análogo, a alínea *(b)* do Teorema 3.5 permite mostrar que o Teorema 3.3 é válido nos casos em que $1<p\leqslant \frac{N}{N-1}$, se $N\geqslant 2$, e $1<p<\infty$, se $N=1$. Assim, falta provar o Teorema 3.3 nos casos em que $p>2$ (se $N=2$), $p\geqslant 2$ (se $N=3$) e $2\leqslant p<3$ (se $N=4$). Para tal, seguiremos a estratégia de [6], que permite generalizar o trabalho feito por Dancer, Wei e Weth [5] para o caso em que $p=2$ e $N\leqslant 3$.

De seguida, enunciamos uma versão mais fraca do Lema de duplicação de Poláčik, Quittner e Souplet [20], que será uma ferramenta essencial para obter limitações universais para as soluções de (3.6).

Lema 3.7. *Seja (X,d) um espaço métrico completo e seja $\Gamma\subset X$ um subconjunto fechado. Para além disso, sejam $k>0$ e $M:D\to]0,\infty[$ uma aplicação contínua, onde $D:=X\setminus\Gamma$.*

(i) Se $x\in D$ é tal que $M(x)\mathrm{dist}(x,\Gamma)>2k$, então existe $y\in D$ tal que $M(y)\mathrm{dist}(y,\Gamma)>2k$, $M(y)\geqslant M(x)$ e

$$M(z)\leqslant 2M(y)\quad \textit{para qualquer } z\in D \textit{ tal que } d(z,y)\leqslant \frac{k}{M(y)}.$$

(ii) Se $\Gamma=\emptyset$ e consequentemente $D=X$, então, para qualquer $\theta<\sup_X M$ e para qualquer $k>0$, existe $y\in X$ tal que $M(y)\geqslant\theta$ e

$$M(z)\leqslant 2M(y)\quad \textit{para qualquer } z\in X \textit{ tal que } d(z,y)\leqslant \frac{k}{M(y)}.$$

Lema 3.8. *Suponhamos que $p>1$ e que* (H) *é válida. Então, existe uma constante $C>0$ tal que, para qualquer solução (u,v) de*

$$\begin{cases} -\Delta u=\mu_1 u^{2p-1}+\beta u^{p-1}v^p & \textit{em } \mathbb{R}^N_+,\\ -\Delta v=\mu_2 v^{2p-1}+\beta v^{p-1}u^p & \textit{em } \mathbb{R}^N_+,\\ u,v\geqslant 0 \textit{ em } \mathbb{R}^N_+, \end{cases}\tag{3.9}$$

temos

$$\left[u^{p-1}+v^{p-1}+|\nabla u|^{\frac{p-1}{p}}+|\nabla v|^{\frac{p-1}{p}}\right](x)\leqslant \frac{C}{x_N},\quad \forall x=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N_+.$$

Observação 3.9. Se $p > 1$ e $N = 1$, ou se $1 < p \leqslant \frac{N}{N-1}$ e $N \geqslant 2$, o resultado é trivialmente verificado para qualquer constante $C > 0$, já que, pela Observação 3.6, $u \equiv v \equiv 0$.

Demonstração do Lema 3.8. Consideremos as funções $M_k : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$, definidas por

$$M_k(x) = \left[u_k^{p-1} + v_k^{p-1} + |\nabla u_k|^{\frac{p-1}{p}} + |\nabla v_k|^{\frac{p-1}{p}}\right](x), \quad x \in \mathbb{R}^N_+.$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma sucessão de soluções $(u_k, v_k)_k$ de (3.9) e uma sucessão de pontos $x^k = (x_1^k, \ldots, x_N^k) \in \mathbb{R}^N_+$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$M_k(x^k)x_N^k > 2k, \quad \forall k.$$

Então, pelo Lema 3.7*(i)* aplicado com $X = \overline{\mathbb{R}^N_+}$ e $\Gamma = \partial\mathbb{R}^N_+$, existe outra sucessão $(y^k)_k \subset \mathbb{R}^N_+$ tal que $M_k(y^k)y_N^k > 2k$ e

$$M_k(z) \leqslant 2M_k(y^k) \quad \text{para todo o } z \in B_{k\lambda_k}(y^k), \tag{3.10}$$

onde $\lambda_k := \frac{1}{M_k(y^k)}$.
Definimos agora as funções $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k : B_k(0) \to \mathbb{R}$

$$\tilde{u}_k(x) = \lambda_k^{\frac{1}{p-1}} u_k(y^k + \lambda_k x), \quad \tilde{v}_k(x) = \lambda_k^{\frac{1}{p-1}} v_k(y^k + \lambda_k x).$$

Observe-se que, se tivermos $x \in B_k(0)$, então $z = y^k + \lambda_k x \in B_{k\lambda_k}(y^k) \subset \mathbb{R}^N_+$. Logo $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k$ são soluções positivas de

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_k = \mu_1 \tilde{u}_k^{2p-1} + \beta \tilde{u}_k^{p-1}\tilde{v}_k^p & \text{em } B_k(0), \\ -\Delta \tilde{v}_k = \mu_2 \tilde{v}_k^{2p-1} + \beta \tilde{v}_k^{p-1}\tilde{u}_k^p & \text{em } B_k(0). \end{cases}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{u}_k^{p-1} + \tilde{v}_k^{p-1} + |\nabla \tilde{u}_k|^{\frac{p-1}{p}} + |\nabla \tilde{v}_k|^{\frac{p-1}{p}}\right](0) = \lambda_k u_k^{p-1}(y^k) + \lambda_k v_k^{p-1}(y^k) \\ &+ \left|\lambda_k^{\frac{p}{p-1}} \nabla u_k(y^k)\right|^{\frac{p-1}{p}} + \left|\lambda_k^{\frac{p}{p-1}} \nabla v_k(y^k)\right|^{\frac{p-1}{p}} = \lambda_k M_k(y^k) = 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

e, por (3.10),

$$\begin{aligned} &\max_{x \in B_k(0)} \left[\tilde{u}_k^{p-1} + \tilde{v}_k^{p-1} + |\nabla \tilde{u}_k|^{\frac{p-1}{p}} + |\nabla \tilde{v}_k|^{\frac{p-1}{p}}\right](x) \\ &= \max_{x \in B_k(0)} \lambda_k M_k(y^k + \lambda_k x) \leqslant 2\lambda_k M_k(y^k) = 2. \end{aligned}$$

Por estimativas elípticas, concluímos que existe uma subsucessão de $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)_k$ que converge em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para uma solução (u, v) de (3.4) em $\mathbb{R}^N$ que tem as duas componentes não negativas. Como, por (3.11), temos

$$\left[u^{p-1} + v^{p-1} + |\nabla u|^{\frac{p-1}{p}} + |\nabla v|^{\frac{p-1}{p}}\right](0) = 1,$$

resulta que (u, v) é uma solução não trivial, o que contradiz a hipótese (H).

□

Vamos agora mostrar uma identidade de integrais calculados numa família de cilindros, que resulta das estimativas do Lema 3.8.

Lema 3.10. *Suponhamos que* $N \geqslant 2$, $p > 1$ *e que* (H) *é válida. Para* $r > 0$, *consideremos o conjunto*

$$Z_r := \{(x', t) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| \leqslant r, t \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^N_+,$$

cuja fronteira é formada pelas duas partes

$$\begin{aligned} C_r &:= \{(x', t) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| = r, t \geqslant 0\}, \\ D_r &:= \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| \leqslant r\}. \end{aligned}$$

Seja ν *o vetor normal unitário exterior a* C_r. *Então*

$$\int_{D_r} \left[(\partial_{x_N} u)^2 + (\partial_{x_N} v)^2\right] d\sigma(x) = 2 \int_{C_r} [(\partial_\nu u)(\partial_{x_N} u) + (\partial_\nu v)(\partial_{x_N} v)]\, d\sigma(x)$$

para qualquer $r > 0$ *e qualquer* (u, v) *solução de* (3.6).

Demonstração. Para $r, s > 0$, consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned} Z_r^s &:= \{(x', t) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| \leqslant r, 0 \leqslant t \leqslant s\} \subset Z_r, \\ C_r^s &:= \{(x', t) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| = r, 0 \leqslant t \leqslant s\} \subset C_r \text{ e} \\ D_r^s &:= \{(x', s) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| \leqslant r\}. \end{aligned}$$

Observamos que (3.6) é um sistema do tipo gradiente, isto é, pode ser escrito como $\Delta u = \partial_u F(u, v)$, $\Delta v = \partial_v F(u, v)$, onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$F(u, v) = -\frac{\mu_1}{2p} u^{2p} - \frac{\mu_2}{2p} v^{2p} - \frac{\beta}{p} u^p v^p.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por $\partial_{x_N} u$, a segunda por $\partial_{x_N} v$ e integrando em Z_r^s, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Z_r^s} [\Delta u\, \partial_{x_N} u + \Delta v\, \partial_{x_N} v]\, dx &= \int_{Z_r^s} [\partial_u F(u, v) \partial_{x_N} u + \partial_v F(u, v) \partial_{x_N} v]\, dx \\ &= \int_{Z_r^s} \partial_{x_N} F(u, v) dx = \int_{D_r^s} F(u, v)\, d\sigma(x) - \int_{D_r} F(u, v)\, d\sigma(x) \\ &= \int_{D_r^s} F(u, v)\, d\sigma(x), \end{aligned} \tag{3.12}$$

visto que $u \equiv v \equiv 0$ em $\partial \mathbb{R}^N_+$, e consequentemente $F \equiv 0$ em D_r. Por outro lado, pela fórmula de Green,

$$\begin{aligned} \int_{Z_r^s} [\Delta u\, \partial_{x_N} u + \Delta v\, \partial_{x_N} v]\, dx &= \int_{C_r^s} [\partial_\nu u\, \partial_{x_N} u + \partial_\nu v\, \partial_{x_N} v]\, d\sigma(x) \\ &+ \int_{D_r^s} \left[(\partial_{x_N} u)^2 + (\partial_{x_N} v)^2\right] d\sigma(x) - \int_{D_r} \left[(\partial_{x_N} u)^2 + (\partial_{x_N} v)^2\right] d\sigma(x) \\ &- \int_{Z_r^s} [\nabla u \cdot \nabla \partial_{x_N} u + \nabla v \cdot \nabla \partial_{x_N} v]\, dx, \end{aligned} \tag{3.13}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}&\int_{Z_r^s} [\nabla u\cdot\nabla\partial_{x_N}u+\nabla v\cdot\nabla\partial_{x_N}v]\,dx=\frac{1}{2}\int_{Z_r^s}\partial_{x_N}\left[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right]dx\\ &=\frac{1}{2}\int_{D_r^s}\left[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right]d\sigma(x)-\frac{1}{2}\int_{D_r}\left[(\partial_{x_N}u)^2+(\partial_{x_N}v)^2\right]d\sigma(x).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Combinando (3.12)-(3.14), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{D_r}\left[(\partial_{x_N}u)^2+(\partial_{x_N}v)^2\right]d\sigma(x)=\int_{C_r^s}[\partial_\nu u\,\partial_{x_N}u+\partial_\nu v\,\partial_{x_N}v]\,d\sigma(x)\\ &+\int_{D_r^s}\left[(\partial_{x_N}u)^2+(\partial_{x_N}v)^2-\frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)-F(u,v)\right]d\sigma(x).\end{aligned}$$

Por fim, fazendo $s\to\infty$ (para $r>0$ fixo) e usando as estimativas do Lema 3.8, concluímos que

$$\frac{1}{2}\int_{D_r}\left[(\partial_{x_N}u)^2+(\partial_{x_N}v)^2\right]d\sigma(x)=\int_{C_r}[\partial_\nu u\,\partial_{x_N}u+\partial_\nu v\,\partial_{x_N}v]\,d\sigma(x).$$

□

O próximo resultado permite que se trabalhe apenas com soluções limitadas não triviais.

Lema 3.11. *Seja $p>1$ e suponhamos que* (H) *é válida. Então, se* (3.6) *admitir uma solução <u>não limitada</u>,* (3.6) *também admite uma solução <u>limitada</u> <u>não trivial</u>.*

Demonstração. Seja $(u,v):\mathbb{R}^N_+\to\mathbb{R}^2$ uma solução não limitada de (3.6) e suponhamos que (3.4) não admite soluções não triviais. Defina-se a aplicação $M:\overline{\mathbb{R}^N_+}\to\mathbb{R}$ como

$$M(x):=(u(x)+v(x))^{p-1}.$$

Aplicando o Lema 3.7*(ii)* com $X:=\overline{\mathbb{R}^N_+}$, resulta que existe uma sucessão $(y^k)_k\subset\mathbb{R}^N_+$ tal que $M(y^k)\to\infty$ quando $k\to\infty$ e

$$M(z)\leqslant 2M(y^k),\quad \forall z\in\overline{\mathbb{R}^N_+}\cap B_{k/M(y^k)}(y^k),\ k\in\mathbb{N}.\tag{3.15}$$

Defina-se agora o semiespaço afim $H_k:=\{z\in\mathbb{R}^N : z_N>-d_k\}$, onde $d_k:=y^k_N M(y^k)$. Então, as aplicações $\tilde u_k,\tilde v_k:\overline{H}_k\to\mathbb{R}$, dadas por

$$\tilde u_k(z):=\frac{u\left(y^k+\frac{z}{M(y^k)}\right)}{u(y^k)+v(y^k)},\quad \tilde v_k(z):=\frac{v\left(y^k+\frac{z}{M(y^k)}\right)}{u(y^k)+v(y^k)}\quad (k\in\mathbb{N}),$$

formam uma solução positiva do sistema

$$\begin{cases}-\Delta\tilde u_k=\mu_1\tilde u_k^{2p-1}+\beta\tilde u_k^{p-1}\tilde v_k^p & \text{em } H_k,\\ -\Delta\tilde v_k=\mu_2\tilde v_k^{2p-1}+\beta\tilde v_k^{p-1}\tilde u_k^p & \text{em } H_k,\\ \tilde u_k\equiv\tilde v_k\equiv 0 \text{ sobre } \partial H_k.\end{cases}\tag{3.16}$$

Além disso, tem-se $\tilde{u}_k(0) + \tilde{v}_k(0) = 1$ e, por (3.15), resulta que

$$\tilde{u}_k(z) + \tilde{v}_k(z) = \left(\frac{M\left(y^k + \frac{z}{M(y^k)}\right)}{M(y^k)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant 2^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall z \in H_k \cap B_k(0). \tag{3.17}$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $d_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Por estimativas elípticas, as aplicações $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k$ são localmente limitadas para a norma de $W^{2,q}$ em $\mathbb{R}^N$ para $q < \infty$ arbitrariamente grande. Logo, existe uma subsucessão de $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)_k$ que converge em $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para uma solução $(\tilde{u}, \tilde{v})$ de (3.4) não trivial. Mas daqui resulta uma contradição, já que, por hipótese, (3.4) não admite soluções não triviais.

Assim, concluímos que, a menos de uma subsucessão, $d_k \to d \geqslant 0$ quando $k \to \infty$. Aplicando a mudança de coordenadas $U_k, V_k : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$, $U_k(z) := \tilde{u}_k(z - d_k e_N)$, $V_k(z) := \tilde{v}_k(z - d_k e_N)$, resulta que (U_k, V_k) é uma solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta U_k = \mu_1 U_k^{2p-1} + \beta U_k^{p-1} V_k^p & \text{em } \mathbb{R}^N_+, \\ -\Delta V_k = \mu_2 V_k^{2p-1} + \beta V_k^{p-1} U_k^p & \text{em } \mathbb{R}^N_+, \\ U_k \equiv V_k \equiv 0 \text{ sobre } \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases} \tag{3.18}$$

Além disso, tem-se $U_k(d_k e_N) + V_k(d_k e_N) = 1$ e

$$U_k(z) + V_k(z) \leqslant 2^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall z \in B_k(d_k e_N) \cap \overline{R^N_+}.$$

Logo, concluímos que as aplicações U_k, V_k são localmente limitadas para a norma de $W^{2,q}$ em $\overline{\mathbb{R}^N_+}$ para $q < \infty$ arbitrariamente grande e, consequentemente, são também localmente limitadas em $C^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. Como, em particular, temos que ∇U_k, ∇V_k são ainda limitadas ponto a ponto independentemente de k numa vizinhança da origem, as condições de bordo implicam que $d > 0$. Então, existe uma subsucessão de $(U_k, V_k)_k$ que converge em $C^{1,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ para uma solução (U, V) não trivial de (3.6) que satisfaz $U(z) + V(z) \leqslant 2^{\frac{1}{p-1}}$ para $z \in \mathbb{R}^N_+$. Assim, (U, V) é a solução de (3.6) limitada e não trivial que procurávamos.

□

Enunciaremos agora dois resultados que, juntamente com a desigualdade de Harnack até à fronteira, de Berestycki, Caffarelli e Nirenberg [2], nos permitirão estabelecer desigualdades que envolvem o gradiente. A demonstração destes resultados, feita em [6, Lemas 2.4 e 3.1], combina a desigualdade de Harnack usual (cf. Teorema A.11 do Apêndice) com as estimativas do Lema 3.8. Para o Lema 3.13, é ainda necessário estabelecer estimativas assintóticas para soluções de equações escalares elípticas em cones perto do vértice.

Lema 3.12 (1ª desigualdade universal de Harnack)**.** *Suponhamos que* (3.5) *e* (H) *são válidas. Então, para qualquer $d > 0$, existe $C = C(d) > 0$ tal que, para qualquer solução*

(u,v) de (3.6) e quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N_+$ tais que

$$\frac{|x-y|}{\min\{x_N, y_N\}} \leqslant d,$$

temos que

$$\frac{1}{C}u(y) \leqslant u(x) \leqslant Cu(y), \quad \frac{1}{C}v(y) \leqslant v(x) \leqslant Cv(y).$$

Lema 3.13 (2ª desigualdade universal de Harnack)**.** *Suponhamos que* (3.5) *e* (H) *são válidas. Então, para qualquer $\gamma > 1$, existe $C = C(\gamma) > 0$ tal que, para qualquer solução de* (3.6)*, temos*

$$u(x', tx_N) + v(x', tx_N) \leqslant Ct^{\gamma}\big(u(x', x_N) + v(x', x_N)\big),$$

para quaisquer $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+$ e $t \geqslant 1$.

Lema 3.14. *Suponhamos que $N \geqslant 2$, $p \geqslant 2$ e que* (H) *é válida e seja (u,v) uma solução limitada de* (3.6)*. Então:*

(i) Para qualquer $\gamma > 1$, existe $C = C(u,v,\gamma) > 0$ tal que

$$u(x) + v(x) \leqslant Cx_N^{\gamma}\sqrt{|\nabla u(x',0)|^2 + |\nabla v(x',0)|^2}\,,$$

para qualquer $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+$ com $x_N \geqslant 1$.

(ii) Para qualquer $\sigma > 0$, existe $C = C(u,v,\sigma) > 0$ tal que

$$|\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 \leqslant Cx_N^{\sigma}\left(\left|\nabla u(x',0)\right|^2 + \left|\nabla v(x',0)\right|^2\right),$$

para qualquer $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+$ com $x_N \geqslant 1$.

(iii) Existe $C = C(u,v) > 0$ tal que

$$|\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 \leqslant C\min\left\{1, \left|\nabla u(x',0)\right|^2 + \left|\nabla v(x',0)\right|^2\right\},$$

para qualquer $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+$ com $x_N \leqslant 1$.

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que o sistema (3.6) se pode escrever como

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u,v)u \quad \text{em } \mathbb{R}^N_+, \\ -\Delta v = g(u,v)v \quad \text{em } \mathbb{R}^N_+, \\ u, v \geqslant 0 \text{ em } \mathbb{R}^N_+ \quad u \equiv v \equiv 0 \text{ sobre } \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases} \tag{3.19}$$

onde as aplicações $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(u,v) = \mu_1 u^{2p-2} + \beta v^p u^{p-2},$$
$$g(u,v) = \mu_2 v^{2p-2} + \beta u^p v^{p-2}.$$

Para $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, consideremos as aplicações

$$\begin{aligned} M(x') &:= u(x',1) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\nabla u(x',t)|, \\ N(x') &:= v(x',1) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\nabla v(x',t)|. \end{aligned}$$

Com vista a provar (i) e (iii), comecemos por provar que existe $C>0$ tal que

$$\begin{aligned} &M(x') \leqslant C\partial_{x_N} u(x',0), \\ &N(x') \leqslant C\partial_{x_N} v(x',0), \text{ para } x' \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Suponhamos por contradição que existe uma sucessão de pontos $x'_k \in \mathbb{R}^{N-1}$ tal que

$$M(x'_k) \geqslant k\partial_{x_N} u(x'_k,0), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

Sejam $u^k, F^k : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} u^k(x',x_N) &= u(x'+x'_k, x_N), \\ F^k(x',x_N) &= f\big(u(x'+x'_k,x_N), v(x'+x'_k,x_N)\big). \end{aligned}$$

Como u e v são limitadas, as sucessões $(u^k(x))_k$, $(F^k(x))_k$ são uniformemente limitadas em $L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ e temos

$$\begin{cases} -\Delta u^k = F^k u^k & \text{em } \mathbb{R}^N_+, \\ \quad u^k = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases} \tag{3.22}$$

Além disso, por (3.21),

$$u^k(e_N) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\nabla u^k(t\, e_N)| \geqslant k\partial_{x_N} u^k(0), \quad \forall k. \tag{3.23}$$

Pela desigualdade de Harnack até à fronteira de Berestycki, Caffarelli e Nirenberg [2, Teorema 1.3], existe $C>0$ tal que

$$u^k(x) \leqslant Cu^k(e_N) \quad \text{em } W := \{x \in \mathbb{R}^N_+ : |x'| \leqslant 2, x_N \leqslant 3\}. \tag{3.24}$$

É possível normalizar u^k de forma a termos

$$u^k(e_N) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\nabla u^k(t\, e_N)| = 1$$

preservando a estimativa local anterior e a validade de (3.22) e (3.23) (eventualmente perdendo a limitação uniforme de $(u^k)_k$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$). Além disso, por (3.22), (3.24) e por estimativas elípticas até à fronteira, podemos supor, se necessário recorrendo a uma subsucessão, que $u^k \to u$ em $C^{1,\alpha}(W_0)$, onde

$$W_0 = \{x \in \mathbb{R}^N_+ : |x'| \leqslant 1, x_N \leqslant 2\},$$

u é uma solução fraca positiva de

$$\begin{cases} -\Delta u = Fu & \text{em } \mathrm{int}(W_0), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial W_0, \end{cases} \tag{3.25}$$

e $F \in L^\infty(W_0)$ é o limite fraco-estrela de F^k, a menos de uma subsucessão (considerando $L^\infty(W_0)$ como o dual de $L^1(W_0)$). Além disso, como também temos $u(e_N) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\nabla u(t\,e_N)| = 1$, concluímos pelo princípio do máximo forte que u é estritamente positiva em $\mathrm{int}(W_0)$. No entanto, de (3.23) resulta que $\partial_{x_N} u(0) = 0$, o que contradiz o Lema de Hopf (cf. Teorema A.3 do Apêndice). Analogamente se mostra que $N(x') \leqslant C\partial_{x_N} v(x', 0)$ para $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, o que conclui a prova de (3.20).

Provemos (i). Aplicando o Lema 3.13 aos pontos da forma $x = (x', 1) \in \mathbb{R}^N_+$ e utilizando (3.20), concluímos que para qualquer $\gamma > 1$ existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} u(x', t) + v(x', t) &\leqslant C_1 t^\gamma \big(u(x', 1) + v(x', 1)\big) \\ &\leqslant C_2 t^\gamma \big(\partial_{x_N} u(x', 0) + \partial_{x_N} v(x', 0)\big) \\ &= C_2 t^\gamma \big(|\nabla u(x', 0)| + |\nabla v(x', 0)|\big) \\ &\leqslant C_3 t^\gamma \sqrt{|\nabla u(x', 0)|^2 + |\nabla v(x', 0)|^2}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

para qualquer $(x', t) \in \mathbb{R}^N_+$ com $t \geqslant 1$, o que conclui a prova de *(i)*.

Provemos agora *(iii)*. Recorrendo novamente a (3.20), verificamos que

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 &\leqslant M(x')^2 + N(x')^2 \leqslant C_1 \big(M(x') + N(x')\big)^2 \\ &\leqslant C_2 \left(\big(\partial_{x_N} u(x', 0)\big)^2 + \big(\partial_{x_N} v(x', 0)\big)^2 \right) \\ &= C_2 \left(\big|\nabla u(x', 0)\big|^2 + \big|\nabla v(x', 0)\big|^2 \right), \end{aligned} \tag{3.27}$$

para qualquer $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+$ com $x_N \leqslant 1$. Por outro lado, como as funções u e v (e consequentemente f e g) são limitadas em $\mathbb{R}^N_+$, estimativas elípticas até à fronteira uniformes garantem que existe $C > 0$ tal que

$$|\nabla u(x)|, |\nabla v(x)| \leqslant C, \tag{3.28}$$

para $x \in \mathbb{R}^N_+$ com $x_N \leqslant 1$. Então a alínea *(iii)* resulta de combinarmos (3.27) e (3.28).

Para mostrar *(ii)* utilizaremos uma estratégia diferente. Fixemos $\sigma > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N_+$ com $x_N \geqslant 1$. Consideremos as aplicações $\tilde{u}, \tilde{v} : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\tilde{u}(y) = x_N^{\frac{1}{p-1}} u\big((x', 0) + x_N y\big), \quad \tilde{v}(y) = x_N^{\frac{1}{p-1}} v\big((x', 0) + x_N y\big). \tag{3.29}$$

Então $(\tilde{u}, \tilde{v})$ também é uma solução de (3.6). Logo, pelo Lema 3.12, existe $C > 0$ tal que

$$\tilde{u}(y) \leqslant C\tilde{u}(e_N), \quad \tilde{v}(y) \leqslant C\tilde{v}(e_N), \tag{3.30}$$

para $y \in \Omega_0 := \{y \in \mathbb{R}^N : |y - e_N| < \frac{1}{2}\}$. Além disso, pelo Lema 3.8, $|f(\tilde{u}, \tilde{v})|, |g(\tilde{u}, \tilde{v})| \leqslant C$ em Ω_0. Logo, por estimativas usuais do gradiente de soluções da equação de Poisson [13, Teorema 3.9], resulta que

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{u}(e_N)| &\leqslant C \sup_{|y-e_N|\leqslant \frac{1}{4}} \tilde{u}(y) \leqslant C\tilde{u}(e_N), \\ |\nabla \tilde{v}(e_N)| &\leqslant C \sup_{|y-e_N|\leqslant \frac{1}{4}} \tilde{v}(y) \leqslant C\tilde{v}(e_N). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Concluímos assim que

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)| &= x_N^{-\frac{p}{p-1}} |\nabla \tilde{u}(e_N)| \leqslant C x_N^{-\frac{p}{p-1}} \tilde{u}(e_N) = C x_N^{-1} u(x), \\ |\nabla v(x)| &= x_N^{-\frac{p}{p-1}} |\nabla \tilde{v}(e_N)| \leqslant C x_N^{-\frac{p}{p-1}} \tilde{v}(e_N) = C x_N^{-1} v(x). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Mas então, recorrendo à alínea *(i)* com $\gamma = \frac{\sigma}{2} + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} &|\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 \leqslant C_1 x_N^{-2} \big(u(x) + v(x)\big)^2 \\ &\leqslant C_2 x_N^{2\gamma - 2} \big(|\nabla u(x', 0)|^2 + |\nabla v(x', 0)|^2\big) \\ &= C_2 x_N^{\sigma} \big(|\nabla u(x', 0)|^2 + |\nabla v(x', 0)|^2\big), \end{aligned} \tag{3.33}$$

o que termina a prova da alínea *(ii)*.

□

Estamos, por fim, nas condições de completar a prova que se segue.

Demonstração do Teorema 3.3. Tendo em conta a Observação 3.6, podemos, em particular, supor que $N \geqslant 2$ e $p \geqslant 2$. Suponhamos que $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}^N_+, \mathbb{R}^2)$ é uma solução de (3.6). Queremos ver que $u \equiv v \equiv 0$.

Por hipótese, o problema (3.4) não tem soluções não triviais. Logo, pelo Lema 3.11, podemos supor que $(u, v) \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+, \mathbb{R}^2)$. Para $r > 0$, defina-se $S_r := \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| = r\}$, recorde-se a definição do Lema 3.10 $D_r := \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| \leqslant r\}$ e seja

$$h(r) = \int_{D_r} \left[(\partial_{x_N} u)^2 + (\partial_{x_N} v)^2\right] \, d\sigma(x).$$

Iremos separar a prova em dois casos.

Caso 1: $N \geqslant 3$. Seja $\alpha = \frac{N-2}{N-1} \in]0, 1[$. Da hipótese (3.5), resulta, em particular, que $\frac{p}{p-1} > \frac{N-1}{2}$, donde

$$\frac{-1 + 2p\,(1-\alpha)/(p-1)}{\alpha} = \frac{1 - N + 2p/(p-1)}{N-2} > 0.$$

Assim, vem $-(1-\alpha)\frac{2p}{p-1} < -1$, pelo que podemos fixar $\sigma > 0$ tal que

$$\sigma\alpha - (1-\alpha)\frac{2p}{p-1} < -1. \tag{3.34}$$

Para abreviar a escrita, defina-se $\mathcal{V}(x) := |\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2$. Pela alínea *(iii)* do Lema 3.14, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x) &= \mathcal{V}(x)^\alpha \mathcal{V}(x)^{1-\alpha} \\ &\leqslant C^\alpha \big(\min\{1, \mathcal{V}(x',0)\}\big)^\alpha C^{1-\alpha} \big(\min\{1, \mathcal{V}(x',0)\}\big)^{1-\alpha} \\ &\leqslant C\mathcal{V}(x',0)^\alpha 1^{1-\alpha} = C\mathcal{V}(x',0)^\alpha\end{aligned} \tag{3.35}$$

para $x = (x', x_N)$ com $x_N \leqslant 1$. Por outro lado, pelo Lema 3.8, existe $C > 0$ tal que

$$\mathcal{V}(x) \leqslant \frac{C}{x_N^{\frac{2p}{p-1}}}, \quad \forall x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+$$

Combinando esta estimativa com a alínea *(ii)* do Lema 3.14, obtemos

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(x)^\alpha \mathcal{V}(x)^{1-\alpha} \leqslant C\mathcal{V}(x',0)^\alpha x_N^{\sigma\alpha - 2p(1-\alpha)/(p-1)} \tag{3.36}$$

para $x = (x', x_N)$ com $x_N \geqslant 1$. Observe-se que, tendo em conta (3.34), temos que

$$\min\left\{1, t^{\sigma\alpha - 2p(1-\alpha)/(p-1)}\right\} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leqslant 1, \\ t^{\sigma\alpha - 2p(1-\alpha)/(p-1)} & \text{se } t \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.37}$$

Logo, de (3.35) e (3.36), resulta que existe $C > 0$ tal que, para qualquer $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+$,

$$\mathcal{V}(x) \leqslant C \min\left\{1, x_N^{\sigma\alpha - 2p(1-\alpha)/(p-1)}\right\} \mathcal{V}(x',0)^\alpha. \tag{3.38}$$

Então o Lema 3.10 e (3.38) implicam que

$$\begin{aligned} h(r) &= 2\int_{C_r} [\partial_\nu u \, \partial_{x_N} u + \partial_\nu v \, \partial_{x_N} v] \, d\sigma(x) \leqslant 2\int_{C_r} \mathcal{V}(x) \, d\sigma(x) \\ &\leqslant C \int_{C_r} \mathcal{V}(x',0)^\alpha \min\left\{1, x_N^{\sigma\alpha - 2p(1-\alpha)/(p-1)}\right\} d\sigma(x) \\ &\leqslant C \int_{S_r} \mathcal{V}(x',0)^\alpha \int_0^\infty \min\left\{1, t^{\sigma\alpha - 2p(1-\alpha)/(p-1)}\right\} dt \, d\sigma(x') \end{aligned}$$

e, por (3.34), (3.37) e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} &\leqslant C \int_{S_r} \mathcal{V}(x',0)^\alpha d\sigma(x') \leqslant C|S_r|^{1-\alpha} \left(\int_{S_r} \mathcal{V}(x',0) \, d\sigma(x') \right)^\alpha \\ &= C \, r^{(N-2)(1-\alpha)} \big(h'(r)\big)^\alpha. \end{aligned}$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $h(r) > 0$ para qualquer $r > 0$. Temos

$$h(r)^{1/\alpha} \leqslant Cr^{(N-2)(1-\alpha)/\alpha} h'(r),$$

ou seja,

$$Cr^{-(N-2)(1-\alpha)/\alpha} - h(r)^{-1/\alpha} h'(r) \leqslant 0$$

para qualquer $r > 0$. Como, pela definição de α, temos $(N-2)(1-\alpha)/\alpha = 1$, a desigualdade anterior implica que a função

$$g(r) := C \ln r + \frac{\alpha}{1-\alpha}\big(h(r)\big)^{1-(1/\alpha)}$$

é decrescente em $r > 0$. No entanto, temos que $g(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$, o que produz uma contradição. Assim, concluímos que $h(r) = 0$ para, pelo menos, um $r > 0$, o que implica que $\partial_{x_N} u \equiv \partial_{x_N} v \equiv 0$ em D_r. Consequentemente, pelo Lema de Hopf, resulta que $u \equiv v \equiv 0$.

Caso 2: $N = 2$. Neste caso, escolhendo $\alpha = 0$, o Lema 3.8 e a alínea *(iii)* do Lema 3.14 permitem concluir através de uma estimativa análoga à que foi feita anteriormente que existe uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer $r > 0$, $h(r) \leqslant C$. Logo, existe uma sucessão de números positivos $(r_k)_k$ tal que $r_k \to \infty$ e $h'(r_k) \to 0$.

Por outro lado, se escolhermos $\alpha > 0$ e $\sigma > 0$ tais que (3.34) ainda se verifica (o que é possível porque $-\frac{2p}{p-1} < -1$), concluímos pelas mesmas estimativas que $h(r) \leqslant Ch'(r)^\alpha$, pelo que

$$h(r_k) \leqslant Ch'(r_k)^\alpha \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Logo, como a função $r \mapsto h(r)$ é crescente, resulta que $h(r) = 0$ para qualquer $r > 0$ e portanto, tal como no caso anterior, $u \equiv v \equiv 0$.

□

3.3 Limitações *a priori*

Iremos agora aplicar o argumento de Gidas e Spruck [11] para obter limitações *a priori* para soluções de (3.1). Como esta técnica já foi explicada na demonstração do Teorema 1.3, para o caso de uma equação, omitiremos alguns detalhes. Observamos que a generalização da técnica de *blow up* a sistemas elípticos já foi feita, por exemplo, em [8, 7].

Demonstração do Teorema 3.1. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma sucessão de soluções $(u_k, v_k)_k$ de (3.1) tal que

$$\max_{x\in\Omega} u_k(x) + \max_{x\in\Omega} v_k(x) \to +\infty \text{ quando } k \to \infty.$$

Sem perda de generalidade, recorrendo a uma subsucessão se for necessário, podemos supor que

$$M_k := \max_{x\in\Omega} u_k(x) \geqslant \max_{x\in\Omega} v_k(x). \tag{3.39}$$

Consideremos uma sucessão de pontos $(x_k)_k \subset \Omega$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tem $u_k(x_k) = M_k$. Definimos agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, a sucessão de números positivos

$$\lambda_k := M_k^{1-p},$$

os conjuntos

$$\Omega_k := \{y \in \mathbb{R}^N : \lambda_k y + x_k \in \Omega\}$$

e as aplicações $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k : \Omega_k \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{u}_k(y) := \lambda_k^{\frac{1}{p-1}} u_k(\lambda_k y + x_k), \quad \tilde{v}_k(y) := \lambda_k^{\frac{1}{p-1}} v_k(\lambda_k y + x_k).$$

Então, por (3.39), temos que

$$1 = \max_{y \in \Omega_k} \tilde{u}_k(y) \geqslant \max_{y \in \Omega_k} \tilde{v}_k(y), \tag{3.40}$$

e $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)$ é uma solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_k = \mu_1 \tilde{u}_k^{2p-1} + \beta \tilde{u}_k^{p-1} \tilde{v}_k^p + \lambda_k^{-\frac{2p-1}{p-1}} h_1(\lambda_k y + x_k, u_k, v_k) \quad \text{em } \Omega_k, \\ -\Delta \tilde{v}_k = \mu_2 \tilde{v}_k^{2p-1} + \beta \tilde{v}_k^{p-1} \tilde{u}_k^p + \lambda_k^{-\frac{2p-1}{p-1}} h_2(\lambda_k y + x_k, u_k, v_k) \quad \text{em } \Omega_k, \\ \tilde{u} \equiv \tilde{v} \equiv 0 \text{ sobre } \partial\Omega_k. \end{cases} \tag{3.41}$$

Pela hipótese (3.3), temos que

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{h_i(x, u_k, v_k)}{M_k^{2p-1}} = \sup_{x \in \Omega} \lambda_k^{-\frac{2p-1}{p-1}} h_i(x, u_k, v_k) \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Defina-se $d_k := \lambda_k^{-\frac{1}{p-1}} \operatorname{dist}(x_k, \partial\Omega)$. Então, a menos de subsucessão, temos dois casos possíveis.

Caso 1: $d_k \to +\infty$ quando $k \to \infty$. Neste caso, dado $R > 0$, temos que $B_R(0) \subset \Omega_k$ para k suficientemente grande, ou seja, Ω_k "converge"para $\mathbb{R}^N$ quando $k \to \infty$. Assim, aplicando a teoria da regularidade elíptica tal como foi feito na demonstração do Teorema 1.3, concluímos que existe uma subsucessão de $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)_k$ que converge uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ para uma solução (u, v) de

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_1 u^{2p-1} + \beta u^{p-1} v^p \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v = \mu_2 v^{2p-1} + \beta v^{p-1} u^p \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Além disso, (u, v) satisfaz $0 \leqslant u(y) \leqslant 1$, $0 \leqslant v(y) \leqslant 1$ para $y \in \mathbb{R}^N$ e $u(0) = 1$, o que contradiz o Teorema 3.2.

Caso 2: $d_k \to d_0 \geqslant 0$ quando $k \to \infty$. Neste caso, consideremos uma sucessão de pontos $(y_k)_k \subset \partial\Omega_k$ tal que

$$|y_k| = \operatorname{dist}(0, \partial\Omega_k) = d_k.$$

Então, a menos de uma rotação de Ω_k, podemos supor que $y_k = -d_k e_N$. Como Ω é um domínio regular, obtemos neste caso que Ω_k "converge"para o semiespaço $H := \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > -d_0\}$. Tal como foi feito na demonstração do Teorema 1.3, deduzimos que $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \to (u, v)$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N_+$, onde (u, v) é uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_1 u^{2p-1} + \beta u^{p-1} v^p \quad \text{em } H, \\ -\Delta v = \mu_2 v^{2p-1} + \beta v^{p-1} u^p \quad \text{em } H, \\ u \equiv v \equiv 0 \text{ em } \partial H. \end{cases}$$

Como, para além disso, se tem $0 \leqslant u(y) \leqslant 1$, $0 \leqslant v(y) \leqslant 1$ para $y \in \mathbb{R}^N$ e $u(0) = 1$, fazendo uma translação em x_N obtemos uma contradição com o Teorema 3.3.

Assim, em qualquer caso, obtivemos uma contradição, o que conclui a demonstração.

$\square$

Apêndice A

A.1 Lema da deformação

Teorema A.1. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach real e $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional que satisfaz (PS). Defina-se*

$$A_c := \{u \in X : E(u) \leqslant c\},$$
$$K_c := \{u \in X : E(u) = c \text{ e } E'(u) = 0\}.$$

Se $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$ e V é uma vizinhança de K_c, então existem $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ e $\eta \in \mathbb{C}([0,1] \times X, X)$ tais que

1) $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in X$.

2) $\eta(t, u) = u$ para todo $t \in [0,1]$ se $E(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$.

3) $\eta(t, u)$ é um homeomorfismo de X em X para qualquer $t \in [0,1]$.

4) $\|\eta(t, u) - u\| \leqslant 1$ para quaisquer $t \in [0,1]$ e $u \in X$.

5) $E(\eta(t, u)) \leqslant E(u)$ para quaisquer $t \in [0,1]$ e $u \in X$.

6) $\eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus V) \subset A_{c-\varepsilon}$.

7) Se $K_c = \emptyset$, então $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

8) Se E é par, então $\eta(t, u)$ é ímpar em u.

Demonstração. Cf. [21, Teorema A.4].

□

Observação A.2. (i) O Teorema A.1 também é válido se assumirmos que E satisfaz $(PS)_{loc}$[(a)] em vez de (PS), já que ambas as condições asseguram que os conjuntos K_c são compactos.

[(a)] Dizemos que E satisfaz (PS) se toda a sucessão $(u_k)_k \subset X$ tal que $(E(u_k))_k$ é limitada e $E'(u_k) \to 0$ tem uma subsucessão convergente. Dizemos que E satisfaz $(PS)_{loc}$ para $c \in \mathbb{R}$ se existe $\delta > 0$ tal que toda a sucessão $(u_k)_k$ tal que $|E(u_k) - c| < \delta$ e $E'(u_k) \to 0$ tem uma subsucessão convergente.

(ii) Usando as mesmas ideias da demonstração do Teorema A.1, é possível demonstrar um resultado análogo para um funcional E restrito a uma variedade (ver por exemplo [23, Cap. II, Teorema 3.11]).

A.2 Princípios do máximo

Tome-se $c(x) \in L^\infty(\Omega)$.

Teorema A.3 (Lema de Hopf)**.** *Seja B uma bola aberta em $\mathbb{R}^N$ tal que $x_0 \in \partial B$. Suponhamos que $u \in C^2(B) \cap C^1(B \cup \{x_0\})$ é solução de*

$$\Delta u + c(x)u \geqslant 0 \text{ em } B, \quad c(x) \leqslant 0 \text{ em } B.$$

Suponhamos ainda que $u(x) < u(x_0)$ para todo o $x \in B$ e que $u(x_0) \geqslant 0$. Então tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν denota a normal unitária exterior em $x_0 \in \partial B$.

Demonstração. Cf. [14, Teorema 2.5]. □

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e conexo e suponhamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Teorema A.4 (Princípio do máximo forte)**.** *Se u é solução de*

$$\Delta u + c(x)u \geqslant 0 \text{ em } \Omega, \quad c(x) \leqslant 0 \text{ em } \Omega,$$

e se um seu máximo não negativo for atingido no interior de Ω, então u é constante em Ω.

Demonstração. Cf. [14, Teorema 2.7]. □

Teorema A.5 (Princípios de comparação sem restrição de sinal em c)**.**
a) Se $u \leqslant 0$ é solução de $\Delta u + c(x)u \geqslant 0$ em Ω, então ou se tem $u < 0$ em Ω, ou $u \equiv 0$ em Ω.
b) Se $u \geqslant 0$ é solução de $\Delta u + c(x)u \leqslant 0$ em Ω, então ou se tem $u > 0$ em Ω, ou $u \equiv 0$ em Ω.

Demonstração. Cf. [14, Teorema 2.10]. □

A.3 Resultados de álgebra linear

Teorema A.6 (Gershgorin)**.** *Seja $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ uma matriz $n \times n$ e denotemos por R_i o círculo no plano complexo com centro em a_{ii} e raio $\sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}|$, isto é,*

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |a_{ij}| \right\}.$$

Então todos os valores próprios de A estão contidos em $R = \cup_{i=1}^n R_i$.

Demonstração. Cf. [17, Apêndice 7]. □

Definição A.7. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ diz-se estritamente diagonal dominante se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Corolário A.8. *Se $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ é uma matriz real, simétrica e estritamente diagonal dominante tal que todos os elementos da diagonal principal são negativos, então A é definida negativa.*

Demonstração. Pelo Teorema A.6, para cada valor próprio λ de A, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\lambda \in \left[a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \, , \, a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right].$$

Como, para qualquer i, se tem $a_{ii} < 0$ e A é estritamente diagonal dominante, concluímos que $\lambda < 0$. Logo, A é definida negativa. □

A.4 Outros resultados

Teorema A.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado cuja fronteira é uma variedade diferenciável. Seja $p \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função para a qual existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que*

$$|p(x,\xi)| \leqslant a_1 + a_2 |\xi|^{s-1}, \quad \textit{para todo } \xi \in \mathbb{R} \textit{ e } x \in \overline{\Omega},$$

onde $1 \leqslant s < 2^*$ se $N \geqslant 3$, $1 \leqslant s < \infty$ se N=1,2.

Então, definindo

$$P(x,\xi) := \int_0^{\xi} p(x,t)\, dt, \quad E(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x,u) \right) dx,$$

vem que o funcional $E \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e, para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$E'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x,u)\varphi) dx.$$

Além disso, $J(u) := \int_\Omega P(x,u(x))dx$ é fracamente contínuo e $J'(u)$ é compacto.

Demonstração. Cf. [21, Proposições $B.10$ e $B.34$] □

Teorema A.10 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, onde $p \in [1, \infty]$ e q é tal que $1/p + 1/q = 1$. Então $u\, v \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |u\, v| \, dx = |u|_p |v|_q.$$

Demonstração. Cf. [4, Teorema 4.6] □

Teorema A.11 (Desigualdade de Harnack)**.** *Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma função não negativa em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ que satisfaz*

$$-\Delta u + c(x)u = 0 \text{ em } \Omega, \quad c \in L^\infty(\Omega).$$

Então, para qualquer conjunto Ω' estritamente contido em Ω, tem-se

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C \inf_{\Omega'} u, \quad \text{para } C = C(N, \Omega', \Omega).$$

Demonstração. Cf. [13, Corolário 8.21] □

Teorema A.12 (Teorema da extensão de Tietze)**.** *Seja X um espaço topológico normal*[(b)]*. Sejam $A \subset X$ um fechado e $f_0 : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_0(x) = f(x)$ para qualquer $x \in A$.*

Demonstração. Cf. [9, Teorema 2.1.8] □

Observação A.13. Se a função f_0 tiver valores em $\mathbb{R}^N$, podemos aplicar o Teorema A.12 a cada componente, obtendo um resultado mais geral. Em particular, como $\mathbb{C}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, o teorema também é válido para funções com valores em $\mathbb{C}$.

[(b)] Um espaço topológico X diz-se normal se, para quaisquer A e B fechados disjuntos, existem vizinhanças abertas U de A e V de B tais que $U \cap V = \emptyset$.

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] H. Berestycki, L. A. Caffarelli, L. Nirenberg, Inequalities for second-order elliptic equations with applications to unbounded domains. I, *Duke Math. J.*, **81** (1996), 467–494.

[3] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems, *Topol. Methods Nonlinear. Anal.*, **4** (1994), 59–78.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[5] N. Dancer, J.-C. Wei, T. Weth, A priori bounds versus multiple existence of positive solutions for a nonlinear Schrödinger system, *Ann. I. H. Poincaré - AN*, **27** (2010), 953–969.

[6] N. Dancer, T. Weth, Liouville-type results for non-cooperative elliptic systems in a half-space, *J. London Math. Soc.*, **86** (2012), 111–128.

[7] D. G. de Figueiredo, B. Sirakov, Liouville type theorems, monotonicity results and a priori bounds for positive solutions of elliptic systems, *Math. Ann.*, **333** (2005), 231–260.

[8] D. G. de Figueiredo, J. F. Yang, A priori bounds for positive solutions of a non-variational elliptic system, *Comm. Partial Differential Equations*, **26** (2001), 2305–2321.

[9] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[10] B. Gidas, Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Nonlinear partial differential equations in engineering and applied science (Proc. Conf., Univ. Rhode Island, Kingston, R.I., 1979)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **54** (Dekker, New York, 1980) 255—273.

[11] B. Gidas, J. Spruck, A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Commun. Partial Differ. Equations*, **6** (1981), 883–901.

[12] B. Gidas, J. Spruck, Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math*, **34** (1981), 525–598.

[13] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 Edition.

[14] Q. Han, F. Lin, *Elliptic partial differential equations* (Courant Lecture Notes in Mathematics 1); New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[15] G. G. Laptev, Nonexistence of solutions of elliptic differential inequalities in conic domains , *Mat. Zametki*, **71** (2002), 855–866.

[16] G. G. Laptev, The absence of global positive solutions of systems of semilinear elliptic inequalities in cones, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, **64** (2000), 107–124.

[17] P. D. Lax, *Linear Algebra, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.

[18] L. Lusternik, L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Actualités Sci. Industr. **188**, Paris, 1934.

[19] R. Michalek, A $\mathbb{Z}^p$ Borsuk-Ulam theorem and index theory with a multiplicity result in partial differential equations, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **13** (1989), 957–968.

[20] P. Poláčik, P. Quittner, P. Souplet, Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems, *Duke Math. J.*, **139** (2007), 555–579.

[21] P. Rabinowitz,, *Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[22] L. Sanchez, *Métodos da teoria de pontos críticos*, Textos de Matemática, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, 1993.

[23] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer, 1996, 2nd Edition.

[24] R. Tian, Z. Q. Wang, Multiple wave solutions of nonlinear Schrödinger systems, *Top. Methods Nonlinear Analysis*, **37** (2011), 203–223.

[25] Z. Q. Wang, A Z_p-Borsuk-Ulam theorem, *Chinese Sci. Bull.*, **34** (1989), 1153–1157.

[26] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, 1996.